

حسابان ۱

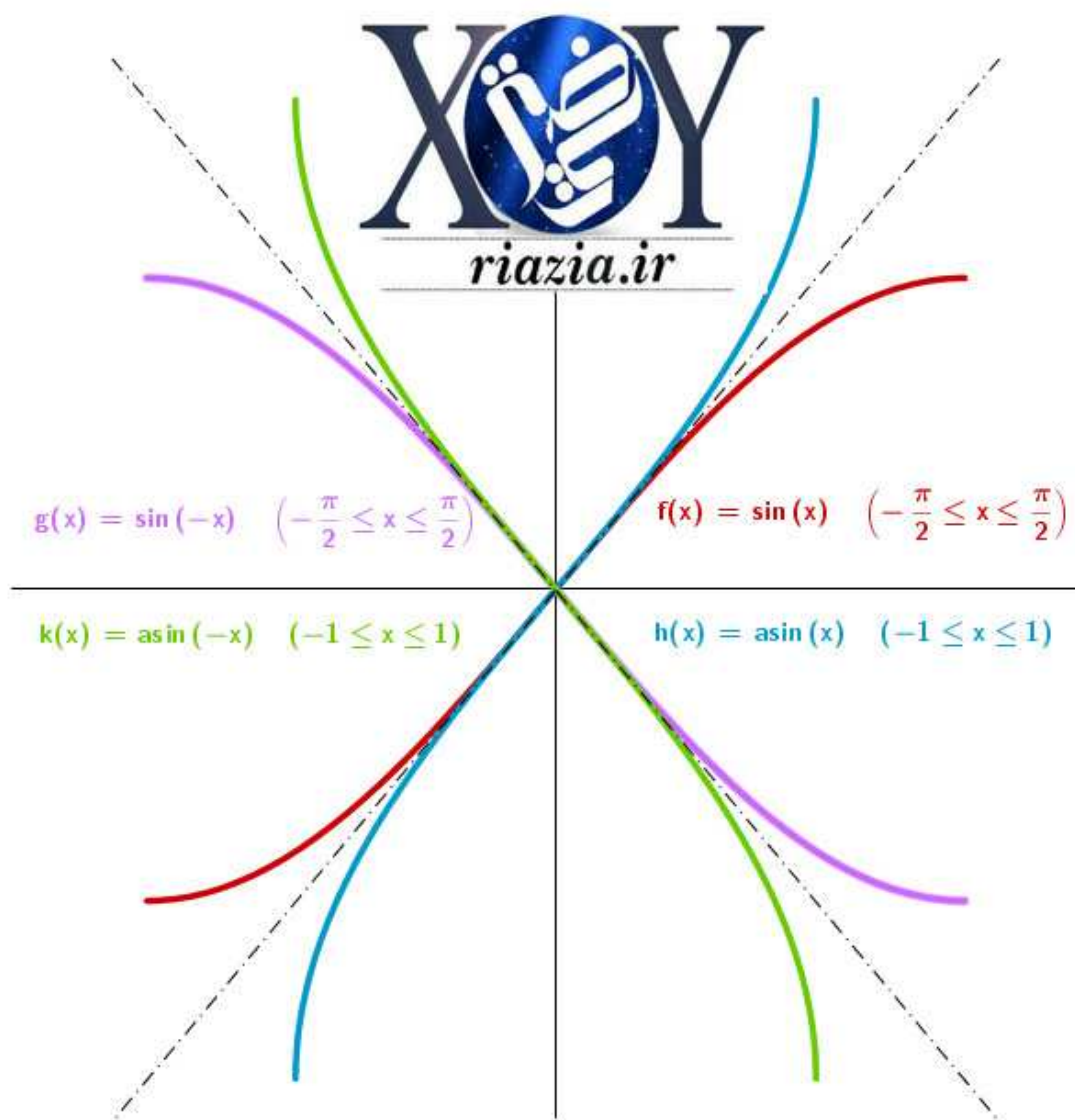
فروردین ۱۴۰۱

یازدهم ریاضی فیزیک

پاسخ کامل مسائل کتاب درسی

دبیر رسمی آموزش و پرورش اصفهان

مؤلف: محمد حسین مصلحی



هرگونه انتشار بدون تغییر در صفحات مجاز است.
این حل المسائل رایگان در اختیار شما قرار گرفته و فروش آن به هر نحو در سایتها یا شبکه های اجتماعی و ... مورد رضایت نویسنده نیست.

فهرست مطالب :

درصفحه	تعداد مسائل	درصفحه	تعداد مسائل
۳۰	صفحه ۹۶	۴	صفحه ۶
۳۱	صفحه ۱۰۴	۵	صفحه ۱۵
۳۲	صفحه ۱۰۹	۷	صفحه ۲۲
۳۴	صفحه ۱۱۲	۹	صفحه ۲۸
۳۵	صفحه ۱۲۰	۱۲	صفحه ۳۵
۳۷	صفحه ۱۲۷	۱۵	صفحه ۴۲
۳۹	صفحه ۱۳۹	۱۷	صفحه ۵۲
۴۱	صفحه ۱۴۴	۲۰	صفحه ۶۲
۴۳	صفحه ۱۵۱	۲۲	صفحه ۶۹
		۲۵	صفحه ۷۷
		۲۶	صفحه ۸۵
		۲۸	صفحه ۹۰

سفن آغازین

درود بر معلم که بزرگترین سرمایه هر جامعه که نسل آینده آن جامعه است ، در اختیار اوست. درود بر دانش آموز ، تنها امید بر آینده ای روشن . این کتاب الکترونیکی برگ سبزی است، تقدیم به فرزندان ایران زمین. اما چرا حل المسائل ؟

- ۱- باید دانش آموز را آگاه کرد که استفاده از حل المسائل آخرین راه است نه اولین کار. اگر پیش از تلاش برای حل مساله سراغ حل المسائل بروید ، اعتماد به نفس خود را برای حل مسائل پیش رو از دست خواهید داد و این موضوع بسیار مترب است.
- ۲- استفاده برفی دانش آموزان از حل المسائل واقعیتی غیر قابل انکار است.
- ۳- نویسندگان حل المسائل ها گاهی از روشهای میانبر و تستی برای حل مسائل استفاده کرده و معلم متهم به پیچیده کردن حل مساله می گردد . پاسفهای موجود در این کتاب مبتنی بر روش کتاب است.
- ۴- برفی دانش آموزان به دلایلی تمام کلاسها را حضور نداشته و جوابهای صعب سوالات را در اختیار ندارند و یا دبیر فرصت حل تمام مسائل را پیدا نمی کند. به دلایلی که برفی از آنها ذکر شد بر آن شدیم ، پاسخ مسائل کتاب درسی را در اختیار قرار دهیم.

مشتاقانه پذیرای نظرات و انتقادات شما هستیم.

محمد حسین مصطفی

دبیر رسمی آموزش و پرورش اصفهان

فروردین ۱۴۰۱

www.riazia.ir

@riaziar

۰۹۱۳۱۰۰۶۶۵۲

آدرس سایت

آدرس اینستاگرام

شماره همراه جهت تماس (sms)

۱- الف) اعداد $1, 3, 5, 7, \dots$ همان تعداد دایره های هم رنگ از گوشه بالا سمت چپ است و مجموع آنها

مربعی $n \times n$ را می سازد که n همان تعداد رنگها است، پس $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$

$$a=1, d=2 \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(2(1) + (n-1)(2)) = \frac{n}{2}(2+2n-2) = \frac{n}{2}(2n) = n^2 \quad \text{ب)}$$

$$102, 108, 114, \dots, 996 \Rightarrow n = \frac{a_n - a}{d} + 1 = \frac{996 - 102}{6} + 1 = 150 \Rightarrow S_n = \frac{150}{2}(102 + 996) = 82350 \quad -2$$

$$5, 8, 11, \dots \Rightarrow a=5, d=3, S_n > 493 \Rightarrow \frac{n}{2}(5 + (n-1)(3)) > 493 \Rightarrow 3n^2 + 7n - 986 > 0 \quad -3$$

عبارت درجه دوم آفر دارای دو ریشه $n = -\frac{58}{3}$, $n = 17$ که برای مثبت بودن عبارت باید

$$n > 17 \vee n < -\frac{58}{3} \quad \boxed{\times}$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{18} = 135 &\Rightarrow 10a + (0+2+4+\dots+18)d = 135 \\ a_1 + a_4 + a_7 + \dots + a_{19} = 150 &\Rightarrow 10a + (1+3+5+\dots+19)d = 150 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 10d = 15 \Rightarrow d = \frac{3}{2} \quad -4$$

$$10a + 2(1+2+3+\dots+9)\left(\frac{3}{2}\right) = 135 \Rightarrow 10a + 135 = 135 \Rightarrow a = 0$$

$$a_n = 2^{n-1} \Rightarrow a=1, a_2=2 \Rightarrow q=2, S_n = 255 \Rightarrow S_n = a\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) = 1\left(\frac{2^n - 1}{2 - 1}\right) = 255 \quad -5$$

$$\Rightarrow 2^n - 1 = 255 \Rightarrow 2^n = 256 = 2^8 \Rightarrow n = 8$$

۶- در مرحله اول $\frac{1}{2}$ و در مرحله دوم $\frac{1}{4}$ و ... پس

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots > \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > \frac{99}{100} \Rightarrow 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n > \frac{99}{100} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{100} \Rightarrow 2^n > 100 \Rightarrow n_{\min} = 7$$

۷- الف) ب) با استفاده از فرمول مجموع جملات دنباله هندسی و طرفین وسطین، اتحاد برست می آید.

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = 1\left(\frac{a^n - 1}{a - 1}\right) \Rightarrow a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$$

$$-۱) \text{ الف) } S = x_1 + x_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1, P = x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \Rightarrow x^2 - x + \frac{2}{9} = 0 \Rightarrow 9x^2 - 9x + 2 = 0$$

$$\text{ب) } x_1 = 2x_2 \Rightarrow S = x_1 + x_2 = 2x_2 + x_2 = 3x_2, P = x_1 \cdot x_2 = 2x_2 \cdot x_2 = 2x_2^2 \Rightarrow x^2 - (3x_2)x + 2x_2^2 = 0$$

به جای x_2 هر عدد دلخواه می توان نوشت پس بیشمار جواب دارد.

-۲ الف) تنها صفر تابع $x = 2$ است و $(0, -2)$ متعلق به سهمی است، پس

$$y = a(x - 2)^2, (0, -2) \in f \Rightarrow -2 = a(0 - 2)^2 \Rightarrow a = -\frac{1}{4} \Rightarrow y = -\frac{1}{4}(x - 2)^2$$

ب) صفرهای تابع اعداد $-3, 1$ هستند و $(-1, -2)$ متعلق به سهمی است، پس

$$y = a(x - 1)(x + 3), (-1, -2) \in f \Rightarrow -2 = a(-1 - 1)(-1 + 3) \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{4}(x - 1)(x + 3) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x^2 + x - \frac{3}{4}$$

$$-۳ الف) \text{ به زمین فرود یعنی ارتفاع صفر } x = 0, x = 36, h(x) = 0 \Rightarrow -0.03x(x - 36) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 36$$

پس از طی مسافت ۳۶ متر دوباره به زمین بر فرود دارد.

ب) حداکثر ارتفاع، عرض راس سهمی است.

$$\frac{0 + 36}{2} = 18 = \text{طول راس سهمی، میانگین طول دو نقطه متقارن سهمی است پس طول راس برابر } 18$$

$$x = 18 \Rightarrow h(18) = -0.03(18)(18 - 36) = \boxed{\frac{9}{72} \text{ m}}$$

$$-۴ الف) f(x) = x^2 - 4x = x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm 2 \Rightarrow \{0, \pm 2\}$$
 صفرهای تابع

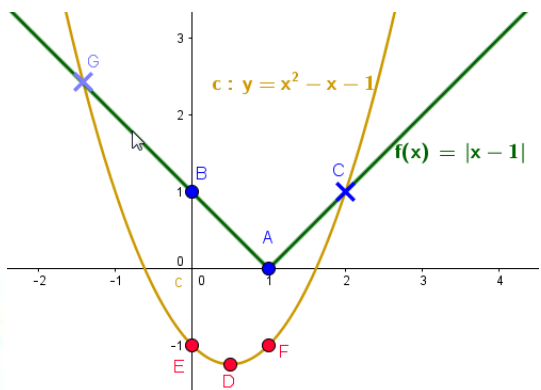
$$\text{ب) } f(x) = 2x^2 + x^2 + 3x = x(2x^2 + x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = -23 \end{cases} \Rightarrow \{0\}$$
 صفر تابع

$$\text{پ) } h(x) = x^2 + 3x^2 + 5 = (x^2)^2 + 3(x^2) + 5 \Rightarrow \Delta = -11 \Rightarrow \{ \}$$
 صفر ندارد

$$-۵ الف) x^2 - 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \\ x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\times} \end{cases}$$

$$\text{ب) } \left(\frac{x^2}{3} - 2 - 6\right)\left(\frac{x^2}{3} - 2 - 1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{3} = 8 \Rightarrow x^2 = 24 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{6} \\ \frac{x^2}{3} = 3 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$$

$$\text{پ) } (4 - x^2 - 4)(4 - x^2 + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4 - x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 4 - x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 7 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7} \end{cases}$$



$$|x-1| = x^2 - x - 1 \Rightarrow \begin{cases} y = |x-1| \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 2 \\ y & 1 & 0 & 1 \end{array} \\ y = x^2 - x - 1 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ y & -1 & -\frac{5}{4} & -1 \end{array} \end{cases}$$

۷- معادله سهمی با رأس (α, β) ، $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ است و دهانه سهمی رو به بالا a مثبت و پایین منفی است.

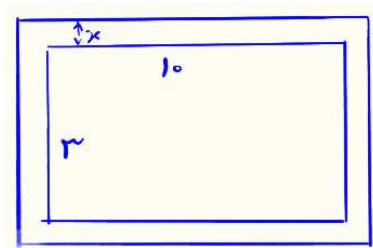
الف) $y = 1(x+3)^2 + 5 \Rightarrow y = x^2 + 6x + 14 \Rightarrow \Delta = -20 \Rightarrow \boxed{\times}$ تابع صفر ندارد

ب) $y = -1(x+2)^2 + 2 \xrightarrow{y=0} (x+2)^2 = 2 \Rightarrow x+2 = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x = -2 \pm \sqrt{2}$ صفرهای تابع

$$y = -(x+2)^2 + 2 = -x^2 - 4x - 2$$

پ) $y = 1(x-3)^2 - 3 \xrightarrow{y=0} (x-3)^2 = 3 \Rightarrow x = 3 \pm \sqrt{3}$ صفرهای تابع و $y = x^2 - 6x + 9 - 3 = x^2 - 6x + 6$

ت) $y = -1(x+2)^2 - 1 \xrightarrow{y=0} (x+2)^2 = -1 \Rightarrow \boxed{\times}$ تابع صفر ندارد و $y = -x^2 - 4x - 4 - 1 \Rightarrow y = -x^2 - 4x - 5$



$$(10+2x)(3+2x) = 14 + 3 \times 10 \Rightarrow 4x^2 + 26x - 14 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 13x - 7 = 0 \Rightarrow (2x-1)(x+7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -7 \end{cases} \quad \boxed{\times}$$

۹- عرض کاشی x و طول کاشی $4x+1$ و مساحت کاشی $x(4x+1)$ است.

$$2000 \cdot x(4x+1) = 528000 \text{ cm}^2 \Rightarrow 4x^2 + x - 264 = 0 \Rightarrow (x-8)(4x+33) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = -\frac{33}{4} \end{cases} \quad \boxed{\times}$$

پس عرض کاشی ۸ و طول کاشی $4(8)+1=33$ سانتیمتر است.

۱- هر دو ریشه پذیرفتنی، زیرا ریشه مفرج کسر نیستند.

$$\frac{6}{x} = \frac{2}{1} + \frac{x-3}{x+1} \xrightarrow{\frac{x(x+1)}{x}} 6(x+1) = 2x(x+1) + x(x-3) \Rightarrow 3x^2 - 7x - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{x=3}, \boxed{x=-\frac{2}{3}}$$

۲- هر دو ریشه پذیرفتنی، زیرا ریشه مفرج کسر نیستند.

$$\frac{p}{2-p} + \frac{2}{p} = -\frac{3}{2} \xrightarrow{\frac{2p(2-p)}{x}} 2p(p) + 2(2-p)(2) = -p(2-p) \Rightarrow 2p^2 + 8 - 4p = -2p + p^2$$

$$\Rightarrow p^2 - 2p - 8 = 0 \Rightarrow (p-4)(p+2) = 0 \Rightarrow \boxed{p=4}, \boxed{p=-2}$$

۳- عدد $y=0$ پذیرفتنی نیست، چون ریشه مفرج است.

$$\frac{3y+5}{y(y+5)} + \frac{y+4}{y+5} = \frac{y+1}{y} \xrightarrow{\frac{y(y+5)}{x}} 1(3y+5) + y(y+4) = (y+5)(y+1) \Rightarrow y = \boxed{\times}$$

$$2\sqrt{x} = \sqrt{3x+4} \xrightarrow{\square^2=\square^2} 4x = 3x+4 \Rightarrow x=4 \xrightarrow{?} 2\sqrt{4} = \sqrt{3(4)+4} \quad -4$$

$$\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1-x = (1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x}) \Rightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x=1 \xrightarrow{?} \frac{1-\sqrt{1}}{1+\sqrt{1}} = 1-1 \Rightarrow x=1 \\ (1+\sqrt{x})^2 = 1 \Rightarrow 1+\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x=0 \xrightarrow{?} \frac{1-\sqrt{0}}{1+\sqrt{0}} = 1-0 \Rightarrow x=0 \end{cases} \quad -5$$

$$\frac{5}{\sqrt{x+2}} = 2 - \frac{1}{\sqrt{x-2}} \Rightarrow (\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})\left(\frac{5}{\sqrt{x+2}}\right) = (\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})\left(2 - \frac{1}{\sqrt{x-2}}\right)$$

$$\Rightarrow 5\sqrt{x} - 1 = 2(x-4) - 1(\sqrt{x+2}) \Rightarrow 2x - 6\sqrt{x} = 0 \Rightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x}-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=9 \end{cases} \quad -6$$

$$\begin{cases} x=0 \xrightarrow{?} \frac{5}{\sqrt{0+2}} = 2 - \frac{1}{\sqrt{0-2}} \\ x=9 \xrightarrow{?} \frac{5}{\sqrt{9+2}} = 2 - \frac{1}{\sqrt{9-2}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} &= 4 - \sqrt{3x+1} \xrightarrow{\square=\square^2} (\sqrt{x+3})^2 = (4 - \sqrt{3x+1})^2 \Rightarrow x+3 = 16 - 8\sqrt{3x+1} + 3x+1 \\ \Rightarrow 2x - 8\sqrt{3x+1} + 14 &= 0 \Rightarrow 4\sqrt{3x+1} = x+7 \xrightarrow{\square=\square^2} 16(3x+1) = (x+7)^2 \Rightarrow x^2 - 34x + 33 = 0 \quad -7 \\ \Rightarrow (x-1)(x-33) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \xrightarrow{?} \sqrt{1+3} = 4 - \sqrt{3(1)+1} \\ x=33 \xrightarrow{?} \sqrt{33+3} = 4 - \sqrt{3(33)+1} \quad \boxed{\times} \end{cases} \end{aligned}$$

۸- قیمت اسباب بازی را x و تعداد اسباب بازی قبل تفیف را n در نظر بگیرید،

$$\begin{aligned} \begin{cases} nx = 120 \\ (n+4)(x-1) = 120 \end{cases} \Rightarrow \frac{120}{x} + 4x - n - 4 = 120 \Rightarrow 4x - \frac{120}{x} - 4 = 0 \Rightarrow x - \frac{30}{x} - 1 = 0 \\ \Rightarrow x^2 - x - 30 = 0 \Rightarrow (x-6)(x+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=-5 \quad \boxed{\times} \end{cases} \end{aligned}$$

قیمت اسباب بازی قبل تفیف ۶ هزار تومان بوده است.

۹- اگر ماشین B، ۱ واحد کار را در زمان x ساعت انجام دهد، پس B در ۱ ساعت $\frac{1}{x}$ کار انجام می دهد و ماشین A، ۱ واحد کار را در زمان $x-15$ ساعت انجام می دهد، پس A در ۱ ساعت $\frac{1}{x-15}$ کار انجام می دهد. اگر هر دو ماشین شروع به کار کنند در یک ساعت $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-15}$ واحد کار انجام می دهند.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{x-15} = \frac{1}{18} \Rightarrow 18x(x-15) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-15} = \frac{1}{18} \right) \Rightarrow 18(x-15) + 18x = x(x-15) \\ \Rightarrow x^2 - 51x + 270 = 0 \Rightarrow (x-45)(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=45 \Rightarrow x-15=30 \\ x=6 \Rightarrow x-15=-9 < 0 \quad \boxed{\times} \end{cases} \end{aligned}$$

پس ماشین B در ۴۵ ساعت و ماشین A در ۳۰ ساعت کار را انجام می دهند.

۱۰- سرعت رفت x و سرعت برگشت $x-8$ پس زمان رفت $\frac{144}{x}$ و زمان برگشت $\frac{144}{x-8}$ و

مجموع زمان رفت و برگشت بدون توقف ۱۵ ساعت است.

$$\begin{aligned} \frac{144}{x} + \frac{144}{x-8} = 15 \Rightarrow \frac{48}{x} + \frac{48}{x-8} = 5 \xrightarrow{\times(x)(x-8)} 48(x-8) + 48(x) = 5x(x-8) \Rightarrow 5x^2 - 136x + 384 = 0 \\ \Rightarrow 5x^2 - 136x + 384 = 0 \Rightarrow x = \frac{68 \pm \sqrt{2704}}{5} = \frac{68 \pm 52}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{120}{5} = 24 \Rightarrow x-8 = 16 > 0 \Rightarrow \boxed{x=24} \\ x = \frac{16}{5} = 3/2 \Rightarrow x-8 = -4/8 < 0 \quad \boxed{\times} \end{cases} \end{aligned}$$

پس سرعت رفت 24 km/h و سرعت برگشت 16 km/h بوده است.

$$\text{الف) } f(x) = x|x| \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x(x) & x \geq 0 \\ x(-x) & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases} \quad -1$$

$$\text{ب) } x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -\infty & -1 & 1 & +\infty \\ \hline x^2 - 1 & & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

$$\Rightarrow g(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & (x > 1) \vee (x < -1) \\ 1 - x^2 & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{ب) } x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -\infty & -1 & 1 & +\infty \\ \hline x - 1 & & - & 0 & + \\ \hline x + 1 & & - & 0 & + \end{array}$$

$$\Rightarrow h(x) = \begin{cases} -(x-1) - (x+1) & x < -1 \\ -(x-1) + (x+1) & -1 \leq x \leq 1 \\ +(x-1) + (x+1) & x > 1 \end{cases} \Rightarrow h(x) = \begin{cases} -2x & x < -1 \\ 2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$$

$$-2 \text{ روش اول) با توجه به محور } 2a + 4 = 6 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow x_1 = 3 + 1 = 4, x_2 = -1 - 1 = -2$$



روش دوم) تعیین علامت

$$|x+1| + |x-3| = 6 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -\infty & -1 & 3 & +\infty \\ \hline x+1 & & - & 0 & + \\ \hline x-3 & & - & - & 0 & + \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < -1 \Rightarrow -x-1-x+3=6 \Rightarrow x=-2 \\ -1 \leq x \leq 3 \Rightarrow x+1-x+3=6 \Rightarrow 4=6 \\ x > 3 \Rightarrow x+1+x-3=6 \Rightarrow x=4 \end{cases}$$

$$\text{الف) } |x-3|=7 \Rightarrow \begin{array}{c} \leftarrow 7 \qquad 7 \rightarrow \\ \bullet \qquad \bullet \qquad \bullet \\ 3-7=-4 \qquad 3 \qquad 3+7=10 \end{array} \Rightarrow x \in \{10, -4\} \quad -3$$

$$\text{ب) } 2|x-6|=4 \Rightarrow |x-6|=2 \Rightarrow \begin{array}{c} \leftarrow 2 \qquad 2 \rightarrow \\ \bullet \qquad \bullet \qquad \bullet \\ 6-2=4 \qquad 6 \qquad 6+2=8 \end{array} \Rightarrow x \in \{4, 8\}$$

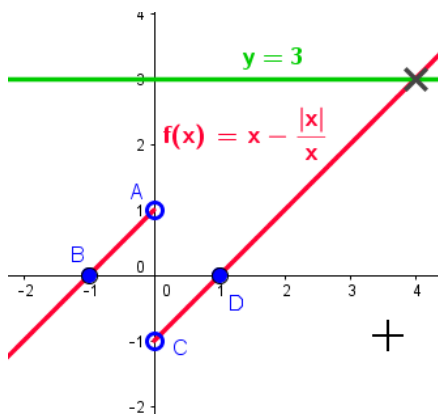
$$\text{ب) } |x+3| > 2 \Rightarrow \begin{array}{c} \leftarrow 2 \qquad 2 \rightarrow \\ \bullet \qquad \bullet \qquad \bullet \\ -3-2=-5 \qquad -3 \qquad -3+2=-1 \end{array} \Rightarrow x > -1 \vee x < -5$$

$$\text{الف) } \frac{2-x}{|x-3|} = 1 \Rightarrow |x-3| = 2-x \Rightarrow x-3 = \pm(2-x) \Rightarrow \begin{cases} x-3 = 2-x \Rightarrow x = \frac{5}{2} \xrightarrow{?} \frac{2-\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}-3} = 1 \\ x-3 = -2+x \Rightarrow \boxed{\times} \end{cases} \quad -\varepsilon$$

$$\text{ب) } \sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2x + 1 \Rightarrow |x-1| = 2x+1 \Rightarrow x-1 = \pm(2x+1) \\ \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 2x+1 \Rightarrow x = -2 \xrightarrow{?} |-2-1| = 2(-2)+1 \\ x-1 = -2x-1 \Rightarrow x = 0 \xrightarrow{?} |0-1| = 2(0)+1 \end{cases}$$

$$\text{الف) } y = x - \frac{x}{|x|} = \begin{cases} x-1 & x > 0 \Rightarrow \frac{x}{y} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ x+1 & x < 0 \Rightarrow \frac{x}{y} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{cases}$$

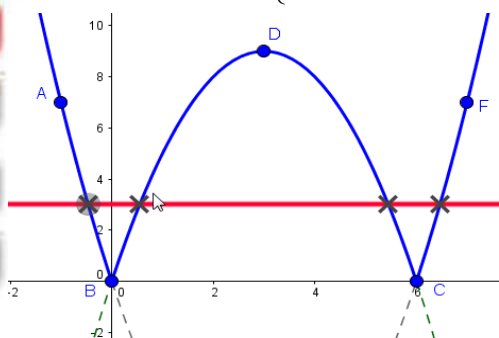
طول مثل برافورد $y=3$ با نمودار f برابر ۴ است.



روش هندسی

$$x > 0 \Rightarrow \begin{cases} y = x-1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=4}, \quad x < 0 \Rightarrow \begin{cases} y = x+1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow x=2 \quad (\text{روش جبری})$$

$$\text{ب) } y = |x^2 - 6x| = \begin{cases} x^2 - 6x & (x > 6) \vee (x < 0) \Rightarrow \frac{x}{y} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 6 & 7 \\ 7 & 0 & -9 & 0 & 7 \end{vmatrix} \\ -x^2 + 6x & 0 \leq x \leq 6 \Rightarrow \frac{x}{y} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 0 & 9 & 0 \end{vmatrix} \end{cases}$$



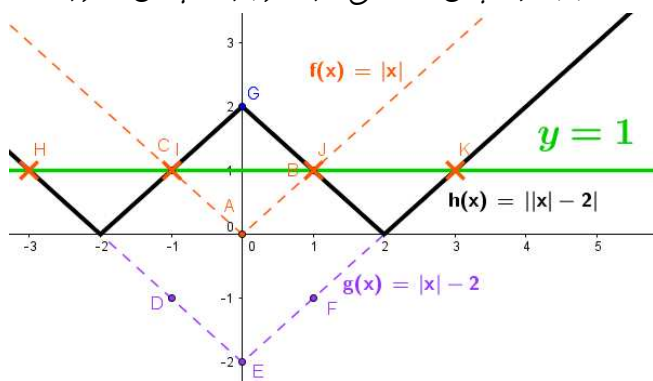
روش هندسی: با توجه به شکل و طول مثل های برافورد، ریشه های

تقریبی عبارتند از: $-0/5, 0/5, 5/5, 6/5$

$$\begin{cases} (x < 0) \vee (x > 6) \Rightarrow x^2 - 6x = 3 \Rightarrow x^2 - 6x - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 3 \pm 2\sqrt{3}} \approx 6/4, -0/46 \\ 0 \leq x \leq 6 \Rightarrow -x^2 + 6x = 3 \Rightarrow x^2 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 3 \pm \sqrt{6}} \approx 5/4, 0/55 \end{cases}$$

روش جبری :

۶- ابتدا نمودار $y = |x|$ را رسم و ۲ واحد به پایین انتقال داده و سپس قسمتی از نمودار که پایین محور x هاست را به بالا منتقل می‌کنیم.



روش هندسی)

طول مثل برافورد تابع f با خط $y = 1$ برابر است با $3, -1, 1, 3$

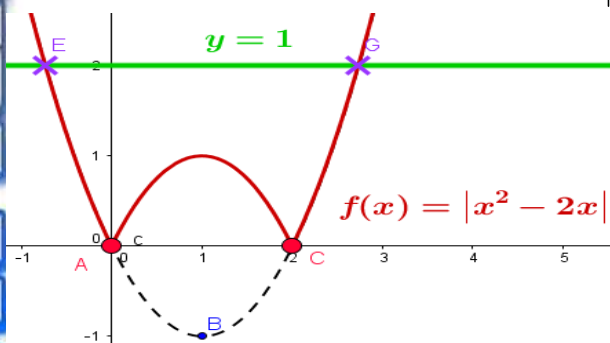
روش جبری)

$$||x| - 2| = 1 \Rightarrow |x| - 2 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} |x| - 2 = 1 \Rightarrow |x| = 3 \Rightarrow \boxed{x = \pm 3} \\ |x| - 2 = -1 \Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow \boxed{x = \pm 1} \end{cases}$$

۷- نمودار تابع را بدون قدر مطلق رسم و قسمتی از نمودار تابع که پایین محور x هاست را

$$y = x^2 - 2x \Rightarrow x_{\min} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

به بالای محور انتقال می‌دهیم.



روش هندسی :

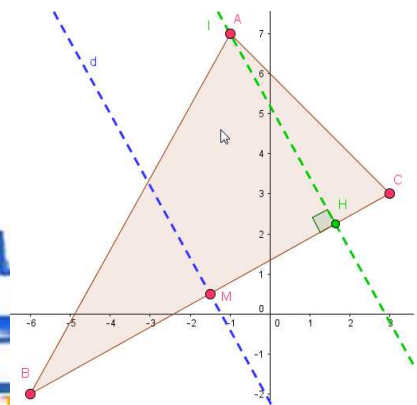
طول تقریبی مثل برافورد نمودار تابع f و خط $y = 2$ برابر $2/75, -0/75$ است.

روش جبری :

$$|x^2 - 2x| = 2 \Rightarrow x^2 - 2x = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1 \pm \sqrt{3}} \approx 2/73, -0/73 \\ x^2 - 2x = -2 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = -4 \quad \boxed{\times} \end{cases}$$

تذکره : در روش هندسی ، جوابی که از روی نمودار پیدا می‌کنیم ، تقریبی است و فضای آن بستگی به دقت رسم دارد و همین که حدود ریشه ها را حدس بزنیم ، کافی است.

۱- الف) رسم مثلث



$$\left. \begin{aligned} AB &= \sqrt{(-6 - (-1))^2 + (-2 - 7)^2} = \sqrt{25 + 81} = \sqrt{106} \\ AC &= \sqrt{(3 - (-1))^2 + (3 - 7)^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \\ BC &= \sqrt{(3 - (-6))^2 + (3 - (-2))^2} = \sqrt{81 + 25} = \sqrt{106} \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB = BC \text{ (ب)}$$

$$\text{پ) مقدمات وسط } BC \text{ برابر}$$

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-6 + 3}{2} = -\frac{3}{2} \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-2 + 3}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

شیب BC برابر $\frac{5}{9}$ پس شیب عمود بر آن برابر $-\frac{9}{5}$ است.

$$\text{و معادله عمود منصف } M(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}), m = -\frac{9}{5} \Rightarrow y - \frac{1}{2} = -\frac{9}{5}(x + \frac{3}{2}) \Rightarrow y - \frac{1}{2} = -\frac{9}{5}x - \frac{27}{10} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{9}{5}x - \frac{11}{5}}$$

ت) معادله BC را نوشته و فاصله A تا خط BC را می یابیم.

$$C(3, 3), m_{BC} = \frac{5}{9} \Rightarrow y - 3 = \frac{5}{9}(x - 3) \Rightarrow y = \frac{5}{9}x + \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{5x - 9y + 12 = 0}$$

و طول ارتفاع AH همان فاصله A تا BC است که برابر

$$A(-1, 7), 5x - 9y + 12 = 0 \Rightarrow d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|5 \times (-1) + (-9) \times (7) + 12|}{\sqrt{5^2 + (-9)^2}} \Rightarrow \boxed{AH = \frac{56}{\sqrt{106}}}$$

۲- مرکز وسط قطر و شعاع دایره، نصف قطر است. پس

$$\begin{cases} x_o = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0 + 8}{2} = 4 \\ y_o = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{6 + (-8)}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{O(4, -1)}$$

$$AB = \sqrt{(8 - 0)^2 + (-8 - 6)^2} = \sqrt{64 + 196} = \sqrt{260} \Rightarrow r = \frac{AB}{2} \Rightarrow \boxed{r = \sqrt{65}}$$

۳- الف) A, B محل برخورد با محور x ها یعنی $y = 0$ هستند

$$x^2 - 8x - 20 = 0 \Rightarrow (x - 10)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 10, x = -2 \Rightarrow A(-2, 0), B(10, 0)$$

$$AB = |x_B - x_A| = |10 - (-2)| = 12 \text{ cm} \text{ (ب)}$$

پ) بیشترین ضامات عرسی، قدرمطلق عرض راس سهمی است،

$$x_c = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2} = 4 \Rightarrow y_c = (4)^2 - 8(4) - 20 = -36 \Rightarrow |-36| = 36 \text{ cm} \text{ بیشترین ضامات عرسی}$$

۴) چون فاصله دو خط موازی مقداری ثابت است، فاصله نقطه ای از یکی را تا دیگری مناسبه می کنیم.

$$L_1: ax + by + c = 0, x = 0 \Rightarrow y = -\frac{c}{b} \Rightarrow A(0, -\frac{c}{b})$$

$$L_2: ax + by + c' = 0 \Rightarrow d = \frac{|(a \times 0) + (b \times (-\frac{c}{b})) + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

۵- چون خط بر دایره مماس است، فاصله مرکز تا خط همان شعاع دایره است.

$$r = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(4 \times (-1)) + (3 \times 2) + (-5)|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{الف) } OS = r \Rightarrow \sqrt{x^2 + 16} = 10 \Rightarrow x^2 + 16 = 100 \Rightarrow x = \pm 6 \quad -6$$

$$\text{ب) } P(-1, 0), S(7, 8) \Rightarrow m_{PS} = \frac{8-0}{7-(-1)} = \frac{8}{8} = 1, \quad Q(1, 0), S(7, 8) \Rightarrow m_{SQ} = \frac{8-0}{7-1} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$P(-1, 0), S(-7, 8) \Rightarrow m_{PS} = \frac{8-0}{-7-(-1)} = \frac{8}{-6} = -\frac{4}{3}, \quad Q(1, 0), S(-7, 8) \Rightarrow m_{SQ} = \frac{8-0}{-7-1} = \frac{8}{-8} = -1$$

$$\text{پ) } m_{PS} \times m_{SQ} = 1 \times (-1) = -1 \Rightarrow PS \perp SQ \quad \text{or} \quad m_{PS} \times m_{SQ} = -\frac{4}{3} \times (-\frac{3}{4}) = -1 \Rightarrow PS \perp SQ$$

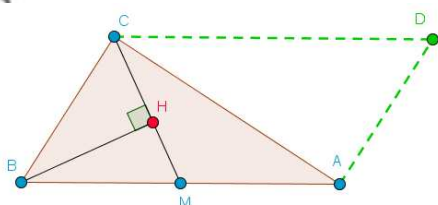
$$2 = \frac{|(a \times 1) + (4 \times 2) + (-1)|}{\sqrt{a^2 + 16}} \Rightarrow 2 = \frac{|a+7|}{\sqrt{a^2+16}} \Rightarrow 4(a^2+16) = (a+7)^2 \Rightarrow 4a^2+64 = a^2+14a+49$$

$$\Rightarrow 3a^2 - 14a + 15 = 0 \Rightarrow (3a-5)(a-3) = 0 \Rightarrow a = \frac{5}{3}, a = 3 \quad -7$$

$$\text{الف) } x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1 + (-3)}{2} = -2, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-13 + 3}{2} = -5 \Rightarrow M(-2, -5) \quad \text{۸- وسط } AB$$

$$m_{MC} = \frac{1 - (-5)}{3 - (-2)} = \frac{6}{5} \Rightarrow y - 1 = \frac{6}{5}(x - 3) \Rightarrow y = \frac{6}{5}x - \frac{8}{5} \Rightarrow 3x - 5y - 8 = 0 \quad \text{معادله خط } MC$$

$$d = BH = \frac{|(3 \times (-3)) + (-5 \times 3) + (-8)|}{\sqrt{(3)^2 + (-5)^2}} \Rightarrow BH = \frac{28}{\sqrt{34}} \quad \text{طول } BH$$



ب) قطرهای متوازی الاضلاع منصف همدیگر پس

$$\begin{cases} x_D + x_B = x_A + x_C \Rightarrow x_D + (-3) = -1 + 3 \Rightarrow x_D = -5 \\ y_D + y_B = y_A + y_C \Rightarrow y_D + 3 = -13 + 1 \Rightarrow y_D = -15 \end{cases} \Rightarrow D(-5, -15)$$

$$B(b, 2b), A(2, 4) \Rightarrow \begin{cases} AB = \sqrt{(b-2)^2 + (2b-4)^2} = |b-2|\sqrt{5} \\ OB = \sqrt{b^2 + (2b)^2} = |b|\sqrt{5} \end{cases}, OB + AB = 5 \Rightarrow |b| + |b-2| = \sqrt{5}$$

$$\begin{cases} b < 0 \Rightarrow -b - b + 2 = \sqrt{5} \Rightarrow b = \frac{2 - \sqrt{5}}{2} \\ 0 \leq b \leq 2 \Rightarrow b - b + 2 = \sqrt{5} \Rightarrow 2 = \sqrt{5} \\ b > 2 \Rightarrow b + b - 2 = \sqrt{5} \Rightarrow b = \frac{2 + \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow B_1 = \left(\frac{2 - \sqrt{5}}{2}, 2 - \sqrt{5}\right), B_2 = \left(\frac{2 + \sqrt{5}}{2}, 2 + \sqrt{5}\right) \quad -9$$

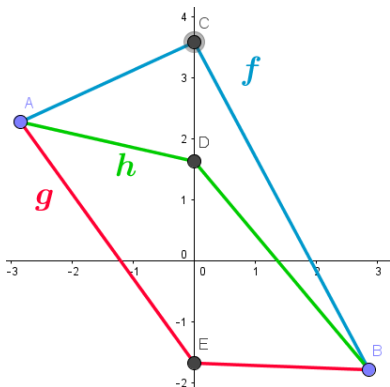
۱۰۔ معادلہ BC, AH ، قطع می دھیم تا H بدست آیر و سپس طول MH ، پیدا می کنیم.

$$m_{BC} = \frac{-2 - (-1)}{1 - 1} = -\frac{1}{1} \Rightarrow y - (-1) = -\frac{1}{1}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{1}x - \frac{6}{1} \Rightarrow x + y + 6 = 0 \quad BC$$

$$AH = \frac{|(1 \times 4) + (1 \times 2) + 6|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}} \Rightarrow AH = \frac{24}{\sqrt{5.0}}, M\left(\frac{1+1}{2}, \frac{-1-2}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{2}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{\left(2 - \frac{2}{2}\right)^2 + \left(2 - \left(-\frac{3}{2}\right)\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{49}{4}} \Rightarrow AM = \sqrt{\frac{50}{4}}$$

$$\Delta AHM : HM = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{50}{4} - \frac{576}{5.0}} = \sqrt{\frac{196}{20.0}} = \frac{14}{1.0\sqrt{2}} \Rightarrow HM = \frac{7\sqrt{2}}{1.0}$$



۱- نقطه دلفواهی روی محور y ها در نظر گرفته و به A, B وصل کنید، تا تابعی دو ضابطه ای حاصل شود.

فواندنی : می توان تابع تک ضابطه ای (چند جمله ای) معرفی کرد.

اگر $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ در این صورت

$$f(x) = \frac{x-x_A}{x_B-x_A}y_B + \frac{x-x_B}{x_A-x_B}y_A + (x-x_A)(x-x_B).P(x)$$

که $P(x)$ چند جمله ای دلفواهی از درجه n است، در این صورت تابع f از درجه $n+2$ خواهد بود.

۲- الف) نادرست، مثال نقض

$$f = \{(1,1), (2,2)\} \quad g = \{(1,2), (2,1)\} \quad D_f = D_g = \{1,2\} \quad R_f = R_g = \{1,2\}, f \neq g$$

ب) درست (در این حالت تابع را پوشا گویند)، چون برد زیر مجموعه همه دامنه است

$$f: A \rightarrow B \Rightarrow R_f \subseteq B$$

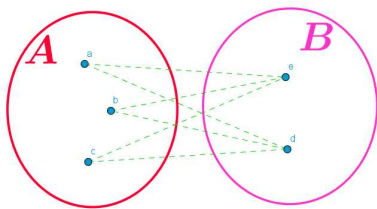
پ) نادرست، طبق ب

ت) درست، می توانیم دامنه را محدود کنیم $f(x) = kx, k \in \mathbb{R}, x \in [0, 3]$

یا تابع رادیکالی مقابل برای k مثبت دلفواهی $g(x) = \sqrt{kx(3-x)}, k > 0$

۳- هر تابع چند جمله ای دارای دامنه \mathbb{R} است، مثلاً $f(x) = kx$ ، عدد k عددی حقیقی دلفواهی

۴- نظیر هر یک از سه عضو دامنه، هر یک از عضوهای d, e می توانند قرار گیرند پس تعداد توابع $2^3 = 8$ است.



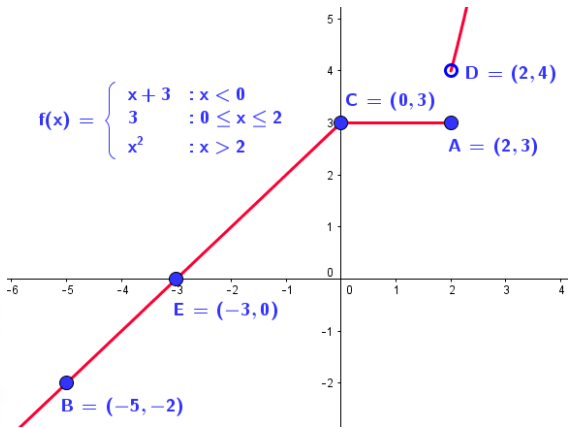
$$\{(a,d), (b,d), (c,d)\}, \{(a,d), (b,d), (c,e)\}$$

$$\{(a,d), (b,e), (c,d)\}, \{(a,d), (b,e), (c,e)\}$$

$$\{(e,d), (b,d), (c,d)\}, \{(e,d), (b,d), (c,e)\}$$

$$\{(e,d), (b,e), (c,d)\}, \{(e,d), (b,e), (c,e)\}$$

۵- یادآوری : $f = h, g = s$ پس $f = g \Leftrightarrow \begin{cases} D_f = D_g \\ \forall x \in D_f = D_g \Rightarrow f(x) = g(x) \end{cases}$



$$D_f = R_f = \mathbb{R}, (-3, 0) \in f, (-5, -2) \in f$$

$$\Rightarrow m = \frac{0 - (-2)}{-3 - (-5)} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow y = x + b$$

$$\Rightarrow 0 = -3 + b \Rightarrow b = 3 \Rightarrow x < 0, y = x + 3$$

-۶

$$\text{الف) } x = 35 \Rightarrow M(35) = 2/89(35) + 70/64 = 171/79 \text{ cm}$$

-۷

$$\text{ب) } M(x) = 185 \Rightarrow 185 = 2/89x + 70/64 \Rightarrow x = \frac{185 - 70/64}{2/89} \approx 39/57 \text{ cm}$$

$$x = 40 \Rightarrow m(40) = 2/75(40) + 71/48 = 181/48 \text{ cm}$$

$$\text{پ) } m(x) = 190 \Rightarrow 190 = 2/75x + 71/48 \Rightarrow x = \frac{190 - 71/48}{2/75} \approx 43/0.9 \text{ cm}$$



الف) $f(x) = \frac{x-1}{2-x}$ $2-x=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

ب) $f(x) = \frac{-3x}{x^2+1}$ $x^2+1=0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{ \} = \mathbb{R}$

پ) $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+x-12}$ $x^2+x-12=(x+4)(x-3)=0 \Rightarrow x=-4, 3 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-4, 3\}$

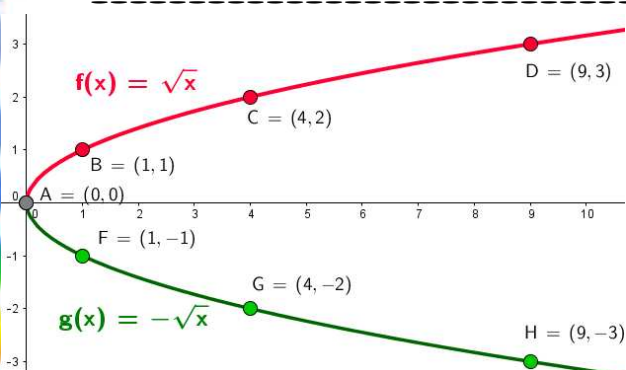
ت) $f(x) = \sqrt{3x+1}$ $3x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{3} \Rightarrow D_f = [-\frac{1}{3}, +\infty)$

ث) $f(x) = 2\sqrt{x} - 3$ $x \geq 0 \Rightarrow D_f = [0, +\infty)$

ج) $f(x) = \sqrt{8-x}$ $8-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 8 \Rightarrow D_f = (-\infty, 8]$

۲- $f(x) = \frac{1}{x}$ اگر $x \rightarrow -x$ خواهیم داشت $g(x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$ یعنی می توان نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه کرد تا نمودار g حاصل شود.

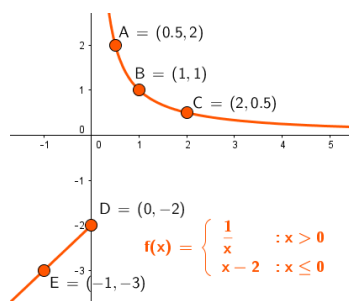
اگر $y \rightarrow -y$ خواهیم داشت $-y = \frac{1}{x} \Rightarrow y = g(x) = -\frac{1}{x}$ یعنی می توان نمودار f را نسبت به محور x ها قرینه کرد تا نمودار g بدست آید.



۳- مقدار y به $-y$ تبدیل شده، پس قرینه $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور x ها می یابیم.

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 4 & 9 \\ \hline y & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

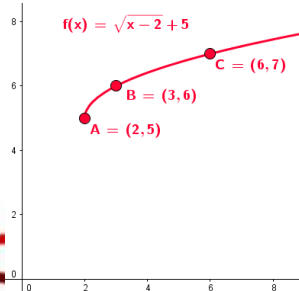
$$\text{الف) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x-2 & x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 1 & 2 & \\ \hline y & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & -1 & -2 \\ \hline y & -2 & -3 & -4 \end{array}$$



$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} \\ R_f = (-\infty, -2] \cup (0, +\infty)$$

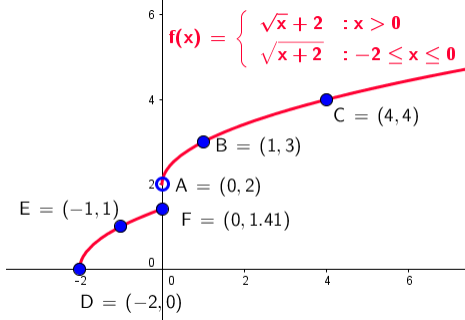
-۴

ب) $f(x) = \sqrt{x-2} + 5$ $\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 2 & 3 & 6 \\ \hline y & 5 & 6 & 7 \end{array}$



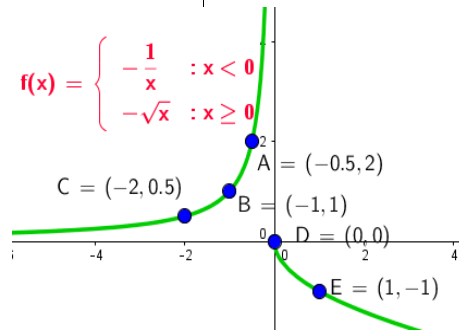
$$\Rightarrow D_f = [2, +\infty), R_f = [5, +\infty)$$

پ) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & x > 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 4 \\ y & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \sqrt{x+2} & -2 \leq x \leq 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -2 & -1 & 0 \\ y & 0 & 1 & \sqrt{2} \end{array} \end{cases}$



$D_f = [-2, +\infty)$
 $R_f = [0, \sqrt{2}] \cup (2, +\infty)$

ت) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x < 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -\frac{1}{2} & -1 & -2 \\ y & 2 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \\ -\sqrt{x} & x \geq 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 4 \\ y & 0 & -1 & -2 \end{array} \end{cases}$



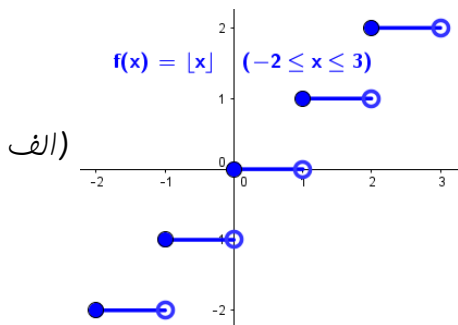
$D_f = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$
 $R_f = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

- ۵- الف) تابع خطی (ب) تابع نیست، به ازای $x=1$ بیشمار مقدار برای y وجود دارد.
پ) تابع ثابت (ت) تابع نیست، به ازای $x=0$ ضابطه اول $y=3$ و ضابطه دوم $y=-1$ را می دهد.
ث) تابع نیست، به ازای $x=1$ داریم $y=\pm 1$ (ج) تابع قدرمطلق

الف) $f(50) = \frac{255(50)}{100-50} = 255$ میلیون تومان

-۶

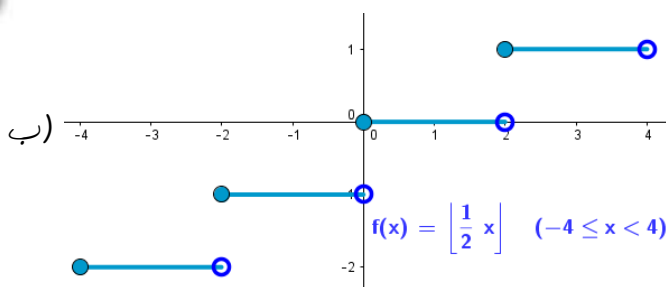
ب) درصد پاکسازی می تواند صفر باشد و تا کمتر از ۱۰۰ درصد امکان پذیر است، پس $D_f = [0, 100)$



$f(x) = \begin{cases} -1 & -2 \leq x < -1 \\ 0 & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \\ 2 & 1 \leq x < 2 \\ 3 & 2 \leq x < 3 \end{cases}$

-۷

$-4 \leq x < 4 \Rightarrow -2 \leq \frac{1}{2}x < 2$



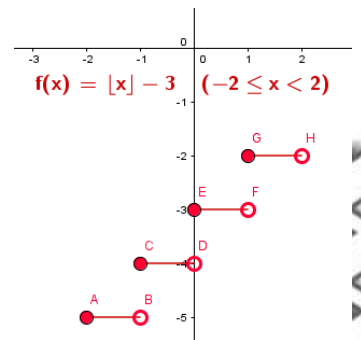
$f(x) = \begin{cases} -2 & -2 \leq \frac{1}{2}x < -1 \\ -1 & -1 \leq \frac{1}{2}x < 0 \\ 0 & 0 \leq \frac{1}{2}x < 1 \\ 1 & 1 \leq \frac{1}{2}x < 2 \end{cases} = \begin{cases} -2 & -4 \leq x < -2 \\ -1 & -2 \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x < 4 \end{cases}$

۱- هر دو تابع را در بازه $[-2, 2]$ رسم می‌کنیم.

$$f(x) = [x] - 3 = \begin{cases} -5 & -2 \leq x < -1 \\ -4 & -1 \leq x < 0 \\ -3 & 0 \leq x < 1 \\ -2 & 1 \leq x < 2 \end{cases} \quad \boxed{1}, -2 \leq x < 2 \Rightarrow -5 \leq x - 3 < -1$$

$$\Rightarrow g(x) = [x - 3] = \begin{cases} -5 & -5 \leq x - 3 < -4 \Rightarrow -2 \leq x < -1 \\ -4 & -4 \leq x - 3 < -3 \Rightarrow -1 \leq x < 0 \\ -3 & -3 \leq x - 3 < -2 \Rightarrow 0 \leq x < 1 \\ -2 & -2 \leq x - 3 < -1 \Rightarrow 1 \leq x < 2 \end{cases} \quad \boxed{2}$$

$$\Rightarrow f = g$$



-۹

الف) $t = 5 \Rightarrow n(5) = \frac{9500(5) - 2000}{4 + 5} \approx 5055$

ب) $5500 = \frac{9500t - 2000}{4 + t} \Rightarrow 9500t - 2000 = 22000 + 5500t \Rightarrow 4000t = 24000 \Rightarrow t = 6 \text{ month}$

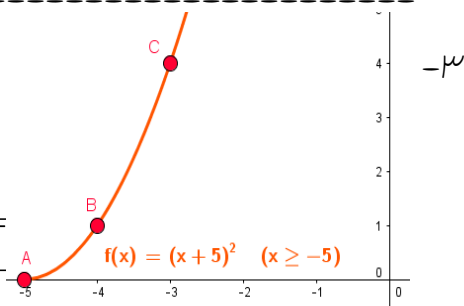
۱- تابعی از دانش آموزان یازدهم ریاضی و نمره مستمر مسابقه در کارنامه نیمسال اول، هر دانش آموز فقط یک نمره دارد ولی چند دانش آموز ممکن است نمره یکسان داشته باشند.

۲- تابع $g(x) = \frac{5}{x}$ یک به یک نیست و تابع وارون وجود ندارد.

الف) تابع f یک به یک است پس وارون پذیر است،

$$f(x) = (x+5)^2, x \geq -5 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -5 & -4 & -3 \\ \hline y & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

$$y = (x+5)^2 \xrightarrow{x \leftrightarrow y} x = (y+5)^2 \Rightarrow y+5 = \pm \sqrt{x} \Rightarrow \boxed{y = -5 + \sqrt{x}}$$

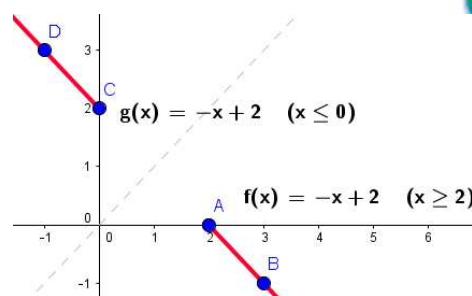


ب) تابع f یک به یک است پس وارون پذیر است،

$$f(x) = -|x-1|+1, x \geq 2 \Rightarrow$$

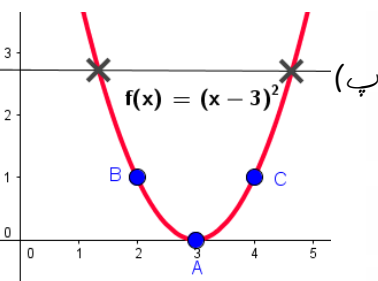
$$x-1 \geq 0 \Rightarrow y = -(x-1)+1 \Rightarrow y = -x+2, x \geq 2 \Rightarrow y \leq 0$$

$$\xrightarrow{x \leftrightarrow y} x = -y+2 \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = 2-x, x \leq 0}$$



$$f(x) = (x-3)^2 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 2 & 3 & 4 \\ \hline y & 1 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow$$

تابع f یک به یک نیست پس وارون پذیر نیست.

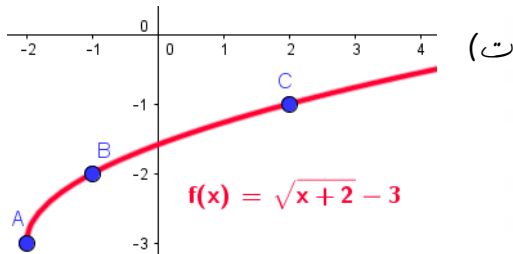


ت) تابع f یک به یک است پس وارون پذیر است.

$$f(x) = \sqrt{x+2}-3 \Rightarrow y+3 \geq 0 \Rightarrow \boxed{y \geq -3}$$

$$\xrightarrow{x \leftrightarrow y} x = \sqrt{y+2}-3 \Rightarrow y+2 = (x+3)^2$$

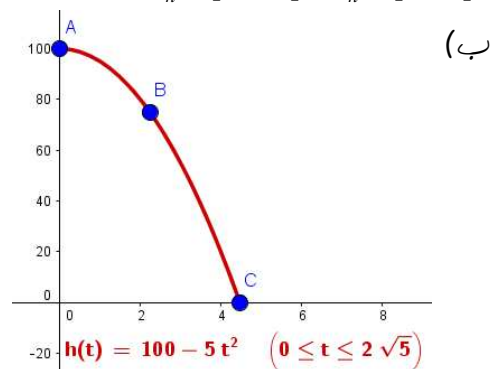
$$\Rightarrow y = \boxed{f^{-1}(x) = (x+3)^2 - 2, x \geq -3}$$



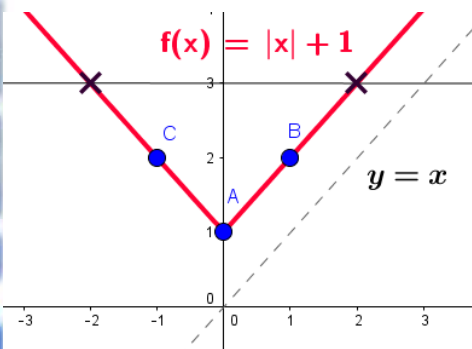
ع- الف) ارتفاع h از ۱۰۰ به ۰ تغییر می کند که این ارتفاعها در زمانهای ۰ و $۲\sqrt{5}$ اتفاق می افتد زیرا
 $h(t) = 100 = 100 - 5t^2 \Rightarrow t = 0$, $h(t) = 0 = 100 - 5t^2 \Rightarrow t^2 = 20 \Rightarrow t = 2\sqrt{5} \Rightarrow D_h = [0, 2\sqrt{5}]$, $R_h = [0, 100]$

$$h(t) = 100 - 5t^2 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} t & 0 & \sqrt{5} & 2\sqrt{5} \\ \hline h(t) & 100 & 75 & 0 \end{array} \Rightarrow$$

تابع f یک به یک است پس وارون پذیر است.



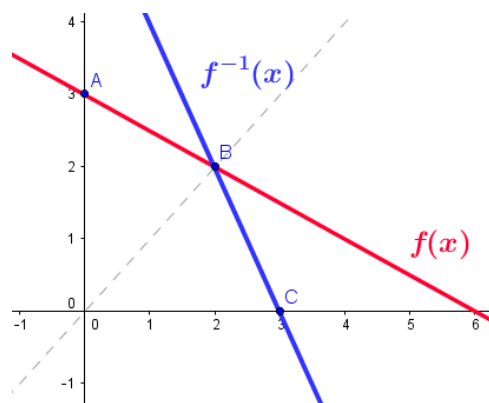
$$h(t) = y = 100 - 5t^2, 0 \leq t \leq 2\sqrt{5} \xrightarrow{t \leftrightarrow y} t = \sqrt{\frac{100 - y}{5}} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{100 - t}{5}} = h^{-1}(t) \quad (\text{پ})$$



۵- می دانیم $y = x$ نیمساز ربع اول و سوم و نقاط بالای این خط داریم ، $y > x$ ، پس کافیت تابعی رسم کنیم که یک به یک نباشد و بالای نیمساز ربع اول و سوم باشد مانند $f(x) = |x| + 1$

$$y = -\frac{1}{4}x + 3 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 0 & 2 \\ \hline y & 3 & 2 \end{array}, \xrightarrow{x \leftrightarrow y} x = -\frac{1}{4}y + 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}y = 3 - x \Rightarrow y = f^{-1}(x) = 2(3 - x) \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 3 & 2 \\ \hline y & 0 & 2 \end{array}$$



$$f(x) = 4x, \quad g(x) = 2 - x \Rightarrow D_f = D_g = \mathbb{R}$$

$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{4x}{2-x}, D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} - \{2\} = \mathbb{R} - \{2\}$$

-۱

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = 4x - (2-x) = 5x - 2, D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2-x) = 4(2-x), D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2-x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{x-3} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{3\} = \{x \neq 3\} \quad g(x) = \frac{4}{x} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0\} = \{x \neq 0\}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{4}{x}\right) = \frac{1}{\frac{4}{x} - 3} = \frac{x}{4-3x}$$

-۲

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \neq 0 \mid \frac{4}{x} \neq 3\} = \mathbb{R} - \{0, \frac{4}{3}\}$$

الف) $f(7) = 5, g(4) = 7 \Rightarrow (f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(7) = 5$

-۳

ب) $f(x) = x + 4, g(x) = 3x \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{2+4}{3(2)} = \frac{6}{6} = 1$

پ) $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = 2x - 1 \Rightarrow (f \circ g)(5) = f(g(5)) = f(2(5) - 1) = f(9) = \sqrt{9} = 3, g(7) = 2(7) - 1 = 13$

ت) $f(x) = 2x, g(x) = x^2 \Rightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2, (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = 4x^2$

$$f(x) = x^2 - 4, g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

ث) $(f \circ g)(x) = f(\sqrt{x^2 - 4}) = (\sqrt{x^2 - 4})^2 - 4 = x^2 - 8 \quad (x \geq 2 \vee x \leq -2)$

$$\Rightarrow (f \circ g)(5) = 5^2 - 8 = 25 - 8 = 17$$

ج) ضرب توابع خاصیت جابجایی دارد، درست است

$$D_f = \{1, 2, 3, 4\}, D_g = \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\Rightarrow f+g = \{(1, f(1)+g(1)), (2, f(2)+g(2)), (3, f(3)+g(3)), (4, f(4)+g(4))\} \\ = \{(1, 4), (2, 7), (3, 11), (4, 15)\}$$

-۴

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \{1, 2, 3, 4\} \mid f(x) \in \mathbb{N}\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\Rightarrow f \circ g = \{(1, (g \circ f)(1)), (2, (g \circ f)(2)), (3, (g \circ f)(3)), (4, (g \circ f)(4))\} \\ = \{(1, 4), (2, 6), (3, 10), (4, 14)\}$$

$$D_f = \{-۴, -۱, ۰, \frac{۵}{۲}, ۳\}, D_g = \{-۴, -۲, ۰, ۳, ۵, ۹\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D_{f+g} = D_{f-g} = D_f \cap D_g = \{-۴, ۰, ۳\} \\ D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = ۰\} = \{-۴, ۰, ۳\} - \{۳\} = \{-۴, ۰\} \end{cases}$$

$$f + g = \{(-۴, f(-۴) + g(-۴)), (۰, f(۰) + g(۰)), (۳, f(۳) + g(۳))\} = \{(-۴, ۶), (۰, ۲), (۳, -۵)\} \quad -۵$$

$$f - g = \{(-۴, f(-۴) - g(-۴)), (۰, f(۰) - g(۰)), (۳, f(۳) - g(۳))\} = \{(-۴, ۲۰), (۰, ۸), (۳, -۵)\}$$

$$f / g = \{(-۴, f(-۴) / g(-۴)), (۰, f(۰) / g(۰))\} = \{(-۴, -\frac{۱۳}{۲}), (۰, -\frac{۵}{۳})\}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + ۵} \xrightarrow{D_f} x^2 + ۵ \geq ۰ \Rightarrow x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \sqrt{۴ - x^2} \xrightarrow{D_g} ۴ - x^2 \geq ۰ \Rightarrow |x| \leq ۲ \Rightarrow -۲ \leq x \leq ۲$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{-۲ \leq x \leq ۲ \mid \sqrt{۴ - x^2} \in \mathbb{R}\} = [-۲, ۲]$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{۴ - x^2}) = \sqrt{(\sqrt{۴ - x^2})^2 + ۵} = \sqrt{۹ - x^2} \quad -۶$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -۲ \leq \sqrt{x^2 + ۵} \leq ۲\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq -۱\} = \emptyset$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x^2 + ۵}) = \sqrt{۴ - (\sqrt{x^2 + ۵})^2} = \sqrt{-۱ - x^2} \Rightarrow g \circ f = \{\}$$

۷- عدد $x = -۳$ در دامنه تابع $\frac{f}{g}$ قرار ندارد.

$$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = ۰\} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} - \{-۳\} = \mathbb{R} - \{-۳\}$$

$$f(x) = ۲x + ۵ \xrightarrow{x \leftrightarrow y} x = ۲y + ۵ \Rightarrow y = \frac{x - ۵}{۲} = f^{-1}(x)$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x - ۵}{۲}\right) = ۲\left(\frac{x - ۵}{۲}\right) + ۵ = x - ۵ + ۵ = x \quad -۸$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(۲x + ۵) = \frac{(۲x + ۵) - ۵}{۲} = x$$

۹- با توجه به شیب و عرض از مبدأ دو تابع f, g داریم $f(x) = -\frac{۲}{۵}x + ۲, g(x) = \frac{۳}{۲}x - ۳$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = -\frac{۲}{۵}x + ۲ + \frac{۳}{۲}x - ۳ = \frac{۱۱}{۱۰}x - ۱$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = -\frac{۲}{۵}x + ۲ - \frac{۳}{۲}x + ۳ = -\frac{۱۹}{۱۰}x + ۵$$

$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x) = \left(-\frac{۲}{۵}x + ۲\right)\left(\frac{۳}{۲}x - ۳\right)$$

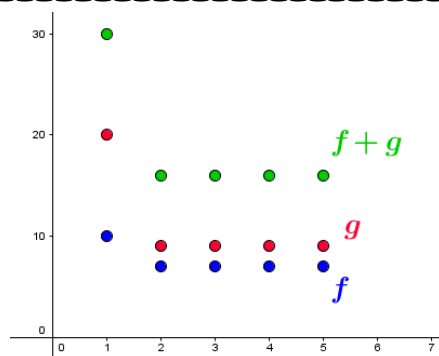
- الف) $(f + g)(۲) = f(۲) + g(۲) = ۲ + (-۱) = ۱$ ب) $(f + g)(-۳) = f(-۳) + g(-۳) \boxed{\times} -۳ \notin D_f$ -۱۰
- پ) $(fg)(\frac{1}{۲}) = f(\frac{1}{۲}) \cdot g(\frac{1}{۲}) = \sqrt{\frac{۵}{۲}} \times \frac{1}{۲} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$ ت) $(f \circ g)(-۴) = f(g(-۴)) = g(۵) = \sqrt{۷}$
- ث) $(\frac{f}{g})(۰) = \frac{f(۰)}{g(۰)} = \frac{\sqrt{۲}}{۱} = \sqrt{۲}$ ج) $(g \circ f)(-۱) = g(f(-۱)) = g(۱) = ۰$

$$y = ax + b \stackrel{x \leftrightarrow y}{\Rightarrow} x = ay + b \Rightarrow ay = x - b \Rightarrow y = \frac{x - b}{a} = \boxed{\frac{1}{a}x - \frac{b}{a} = f^{-1}(x)}$$
 -۱۱

$$f(x) = \frac{۵}{۹}(x - ۳۲) = y \stackrel{x \leftrightarrow y}{\Rightarrow} x = \frac{۵}{۹}(y - ۳۲) \Rightarrow y - ۳۲ = \frac{۹}{۵}x \Rightarrow y = \boxed{f^{-1}(x) = \frac{۹}{۵}x + ۳۲}$$
 -۱۲

$$f(x) = \begin{cases} ۱۰ & x = ۱ \\ ۷ & x \in \mathbb{N} - \{1\} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} ۲۰ & x = ۱ \\ ۹ & x \in \mathbb{N} - \{1\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f + g)(x) = \begin{cases} ۳۰ & x = ۱ \\ ۱۶ & x \in \mathbb{N} - \{1\} \end{cases}$$



-۱۳

الف) $\frac{t}{m} \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline & 100 & 200 & 400 & 800 \end{array} \Rightarrow m(t) = 100 \times 2^t$ ب) $m(20) = 100 \times 2^{20} \approx 10^5 \text{ mg} = 10^5 \text{ gr}$ -۱

۲- نمودار تابع $y = 2^x$ سبزرنگ، نمودار تابع $y = 2^x + 1$ قرمز رنگ و نمودار تابع $y = 2^x - 1$ آبی رنگ است. نمودار توابع $y = a^x + 2$ و $y = a^x - 2$ از انتقال نمودار تابع $y = a^x$ به ترتیب به اندازه ۲ واحد به بالا و ۲ واحد به پایین بدست می آیند.

الف) $A(8) = 10 \cdot (0/8)^8 \approx 10 \cdot (0/16) = 1/6 \text{ mg}$ ب) $\frac{A(t+1)}{A(t)} \times 100 = \frac{10 \cdot (0/8)^{t+1}}{10 \cdot (0/8)^t} \times 100 = 80\%$ -۳

الف) $3^{2/5} = 3^{\frac{2}{5}} = 3^{\sqrt{\frac{2}{5}}} < x < 3^{\sqrt{0}} = 3^{\sqrt{\frac{4}{4}}} \Rightarrow x = 3^{\sqrt{\frac{4}{4}}}, 3^{\sqrt{\frac{17}{4}}}, 3^{\sqrt{\frac{28}{4}}}, \dots$ -۴

ب) $4^{2x-1} > \frac{1}{10.24} \Rightarrow 4^{2x-2} > 2^{-10} \xrightarrow{2>1} 4x - 2 > -10 \Rightarrow 4x > -8 \Rightarrow x > -2$

چون تابع $y = a^x$ برای $a > 1$ تابعی اکیدا صعودی است پس $x > y > z$ (پ)

۵- الف) در نمودار قرمز $3^{1-\sqrt{2}} \approx 3^{-0/4} = f(-0/4) \approx 0/7$ ، $cal \Rightarrow 3^{1-\sqrt{2}} \approx 0/634$

ب) در نمودار آبی $2^{1/25} = g(1/25) \approx 2/2$ ، $cal \Rightarrow 2^{1/25} \approx 2/378$

پ) در نمودار قرمز $3^{1/5} \approx 3^{0/5} = f(1/5) \approx 5$ ، $cal \Rightarrow 3^{1/5} \approx 5/196$

۶- الف) $2^x = \frac{13}{4} = 6/5$ ، $2^2 = 8$ ، $2^4 = 16 \Rightarrow 3 < x < 4$ ب) $2^x = \sqrt{7} \approx 2/6$ ، $2^1 = 2$ ، $2^2 = 4 \Rightarrow 1 < x < 2$ -۶

۷- الف) اگر n تعداد فیلتر و $P(n)$ درصد نافال صی باقیمانده باشد ،

$\frac{n}{P} \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline & 100 & 0/7 \times 100 & (0/7)^2 \times 100 & (0/7)^3 \times 100 \end{array} \Rightarrow P(n) = (0/7)^n \times 100$

ب) از بین رفتن بیش از ۹۶٪ نافال صی یعنی کمتر از ۴٪ نافال صی باقی بماند ،

مداقل ۱۰ لایه فیلتر لازم است $\Rightarrow \begin{cases} 0/7^9 \approx 0/0403 \\ 0/7^{10} \approx 0/0282 \end{cases} \Rightarrow P(n) < 4 \Rightarrow 10 \cdot (0/7)^n < 4 \Rightarrow (0/7)^n < 0/4$

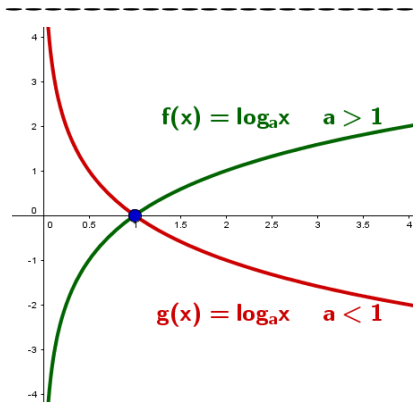
$$\log_{\frac{1}{10}} \frac{1}{10} = a \Rightarrow 10^a = \frac{1}{10} = 10^{-1} \Rightarrow a = -1$$

$$\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{6} = a \Rightarrow 6^a = \frac{1}{6} = 6^{-1} \Rightarrow a = -1$$

$$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = a \Rightarrow 2^a = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\log_{\sqrt[3]{7}} \sqrt[3]{7} = a \Rightarrow 7^a = \sqrt[3]{7} = 7^{\frac{1}{3}} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

-۱



-۲ هر دو تابع یک به یک بوده و از $A(1, 0)$ می‌گذرند و نمودار تابع f قرینه تابع g نسبت به محور x هاست.

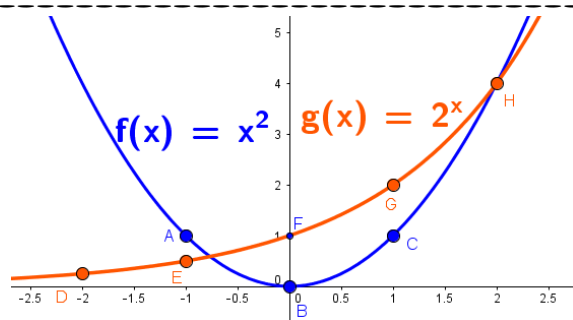
الف)
$$\begin{cases} y = 27 \\ y = 3^x \end{cases} \Rightarrow 3^x = 27 = 3^3 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow A(3, 27)$$

-۳

ب)
$$\begin{cases} y = 10 \\ y = (\frac{1}{10})^x \end{cases} \Rightarrow (\frac{1}{10})^x = 10 \Rightarrow (10^{-1})^x = 10 \Rightarrow -x = 1 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow B(-1, 10)$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -1 & 0 & 1 & \\ \hline y & 1 & 0 & 1 & \end{array}$$

$$g(x) = 2^x \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 \end{array}$$



-۴

تابع $f(x) = x^2$ تابعی یک به یک نیست و محور عرضها، محور تقارن آن است ولی تابع $g(x) = 2^x$ یک به یک باشد و این دو تابع در $(2, 2)$ و نقطه ای با طولی بین $1/5, -1$ متقاطعند.

۵- نادرست. مثال نقض $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = 1$ درست، طبق تعریف لگاریتم

درست. تابع لگاریتم یک به یک است.

نادرست. در مثل قطع محور y ها داریم $x = 0$ که لگاریتم در $x = 0$ تعریف نشده است.

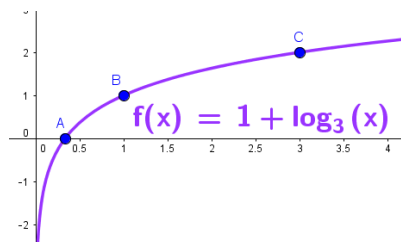
درست. زیرا تابع $y = a^x$ $a > 0, a \neq 1$ و تابع $y = \log_a x$ $a > 0, a \neq 1$ وارون هم اند.

نادرست. مثال نقض $\log_{10} 10 = 1$ $\log_{10} 100 = 2$ ، $100 > 10 > 0$

$$y = 1 + \log_3 x$$

الف) \Rightarrow

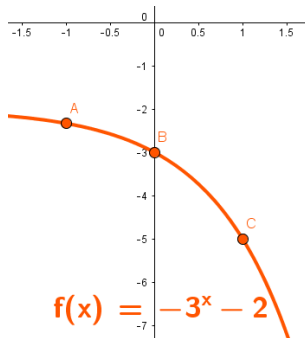
x	$\frac{1}{3}$	۱	۳
y	۰	۱	۲



$$y = -3^x - 2$$

ب) \Rightarrow

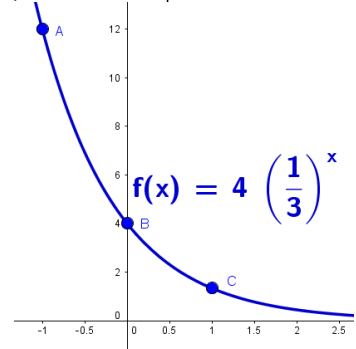
x	-۱	۰	۱
y	$-\frac{7}{3}$	-۳	-۵



$$y = 4\left(\frac{1}{3}\right)^x$$

پ) \Rightarrow

x	-۱	۰	۱
y	۱۲	۴	4/3



$$\text{الف) } \log_7 m^7 - \log_7 m - 3 = 0 \Rightarrow \log_7 \frac{m^7}{m} = 3 \Rightarrow m = 7^3 = 343 \quad -1$$

$$\log_7(12b - 21) - \log_7(b^2 - 3) = 2 \Rightarrow \log_7 \frac{12b - 21}{b^2 - 3} = 2 \Rightarrow \frac{12b - 21}{b^2 - 3} = 7^2$$

$$\text{ب) } \Rightarrow 4b^2 - 12 = 12b - 21 \Rightarrow 4b^2 - 12b + 9 = 0 \Rightarrow (2b - 3)^2 = 0 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

$$12b - 21 > 0, b = \frac{3}{2} \Rightarrow 12\left(\frac{3}{2}\right) - 21 = -3 < 0 \quad \boxed{\times}$$

$$\text{پ) } \log_{\frac{1}{11}}(x^7 - 1) = -1 \Rightarrow x^7 - 1 = \left(\frac{1}{11}\right)^{-1} \Rightarrow x^7 - 1 = 11 \Rightarrow x^7 = 12 \Rightarrow x = \pm \sqrt[7]{12}$$

$$x^7 - 1 > 0, x = \pm \sqrt[7]{12} \Rightarrow (\pm \sqrt[7]{12})^7 - 1 = 12 - 1 = 11 > 0 \Rightarrow \boxed{\square}$$

$$\text{الف) } m(t) = 2^t \Rightarrow \log_2 m(t) = t \quad \text{زمانی، نشان می دهد که جرم باکتری } m(t) \text{ است.} \quad -2$$

$$\text{ب) } t = \log_2 5000 = \log_2 \frac{10000}{2} = \frac{\log 10000 - \log 2}{\log 2} = \frac{4 - 0.301}{0.301} \approx 12.28$$

$$\text{الف) } a^{\log_b a} = a \Rightarrow \log_b a = 1 \Rightarrow a = b \quad -3$$

$$\text{ب) درست } \log_d abc = \log_d(ab)c = \log_d(ab) + \log_d c = \log_d a + \log_d b + \log_d c$$

$$\text{پ) درست } \log x + \log y = \log(xy) \neq \log x \cdot \log y$$

$$\text{ت) درست } \log_{\frac{1}{10}} = -1$$

$$\text{الف) } \begin{array}{c|cccc} t & 0 & 4 & 8 & 12 \\ \hline m & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{array} \Rightarrow m(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4}} \quad -4$$

$$\text{ب) } m(t) = 0.1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4}} = 0.1 \Rightarrow \frac{t}{4} = \log_{\frac{1}{2}} 0.1 = \frac{\log 0.1}{\log \frac{1}{2}} = \frac{-1}{-\log 2} \Rightarrow t = \frac{4}{\log 2} = \frac{4}{0.301} \approx 13.3$$

$$\text{الف) } \log(18 \times 375) = \log(2 \times 3^2 \times 3 \times 5^3) = \log(2 \times 3^3 \times 5^3) = \log 2 + 3 \log 3 + 3 \log 5 \quad -5$$

$$\approx 0.301 + 3(0.4771) + 3(0.6990) = 3.8293$$

$$\text{ب) } \log \sqrt{75} = \log \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \log \frac{3}{4} = \frac{1}{2} (\log 3 - 2 \log 2) \approx \frac{1}{2} (0.4771 - 2(0.301)) = -0.6229$$

$$\text{پ) } \log_7 \frac{\sqrt{8}}{\sqrt[4]{2}} = \log_7 \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{4}}} = \log_7 2^{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{4}, -4\right) \in f \Rightarrow -4 = \log_a\left(\frac{1}{4}\right) = \log_a 4^{-1} = -\log_a 4 \Rightarrow \log_a 4 = 4 \Rightarrow a^4 = 4 \Rightarrow a = \sqrt[4]{4} \quad -6$$

$$\text{الف) } \square \log_b a \times \log_a b = \frac{\log a}{\log b} \times \frac{\log b}{\log a} = 1 \quad -7$$

$$\text{ب) } \square \log 3 + \log 2 = \log(3 \times 2) = \log 6 \neq \log 5$$

t	۰	۳۰	۶۰	۹۰
m	۱۲۸	$128\left(\frac{1}{4}\right)$	$128\left(\frac{1}{4}\right)^2$	$128\left(\frac{1}{4}\right)^3$

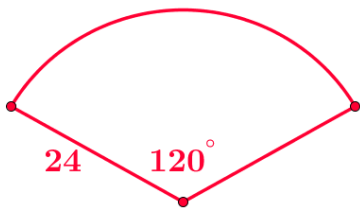
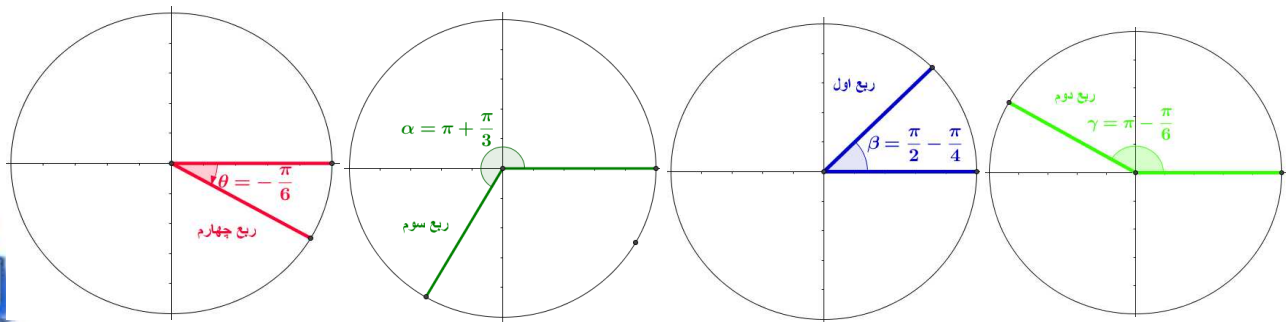
-۸

$$\Rightarrow m(t) = 128\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{t}{30}}, t = 30 \Rightarrow m(30) = 128\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{30}{30}} = 2^7 \times 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

یادآوری: اگر نیمه عمر ماده ای t و جرم اولیه m باشد، جرم باقیمانده پس از زمان t برابر است با

$$m(t) = m_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{t_0}}$$





الف) $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{120}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{120 \cdot \pi}{180} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$

ب) $\theta = \frac{l}{r} \Rightarrow l = r \cdot \theta = 24 \times \frac{2\pi}{3} = 16\pi \approx 50.24 \text{ cm}$

۳- اندازه کمان این قطاع برابر محیط قاعده مخروط $12\pi = 2\pi(r')$ است و

شعاع این قطاع برابر $r' = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$ است، پس اندازه زاویه قطاع برابر

$$\theta = \frac{l}{r'} = \frac{12\pi}{10} = \frac{6\pi}{5} = 216^\circ$$

۴-

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{36^\circ \times \pi}{180} = \frac{\pi}{5}, \theta = \frac{l}{r} \Rightarrow l = r\theta = 6320 \times \frac{\pi}{5} = 1264\pi \approx 3969 \text{ km}$$

$$\text{الف) } \sin(300^\circ) = \sin(360^\circ - 60^\circ) = -\sin(60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

-۱

$$\text{ب) } \cot(75^\circ) = \cot(45^\circ + 30^\circ) = \cot(30^\circ) = \sqrt{3}$$

$$\text{پ) } \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ت) } \cos\left(-\frac{23\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{23\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{24\pi - \pi}{4}\right) = \cos\left(6\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ث) } \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{4\pi + \pi}{4}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ج) } \tan(-84^\circ) = -\tan(84^\circ) = -\tan(90^\circ - 6^\circ) = -(-\tan(6^\circ)) = \sqrt{3}$$

$$\text{چ) } \tan(-15^\circ) = -\tan(15^\circ) = -\tan(45^\circ - 30^\circ) = -(-\tan(30^\circ)) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{ح) } \cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{8\pi + \pi}{4}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{خ) } \tan\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{9\pi + \pi}{3}\right) = \tan\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

$$\text{الف) } \theta = \frac{\pi}{4} - \alpha \Rightarrow I = k \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = k \cdot \sin \theta \Rightarrow I = k \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$$

-۲

$$\text{ب) } \theta = 0 \Rightarrow I = k \cdot \sin(0) = 0, \theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow I = k \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}k, \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = k \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}k$$

پ) k عددی ثابت و مثبت است پس بیشترین مقدار I وقتی است که

$$I = k \cdot \sin \theta, \sin \theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} = 90^\circ \Rightarrow I = k$$

$$\text{الف) درست} \cos \theta + \cos(\pi - \theta) = \cos \theta + (-\cos \theta) = 0$$

-۳

$$\text{ب) نادرست} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) + \cos \theta = \cos \theta + \cos \theta = 2 \cos \theta \neq 1$$

$$\text{پ) درست} \cos(-\theta) = \cos \theta \Rightarrow \cos(-\gamma) = \cos(\gamma)$$

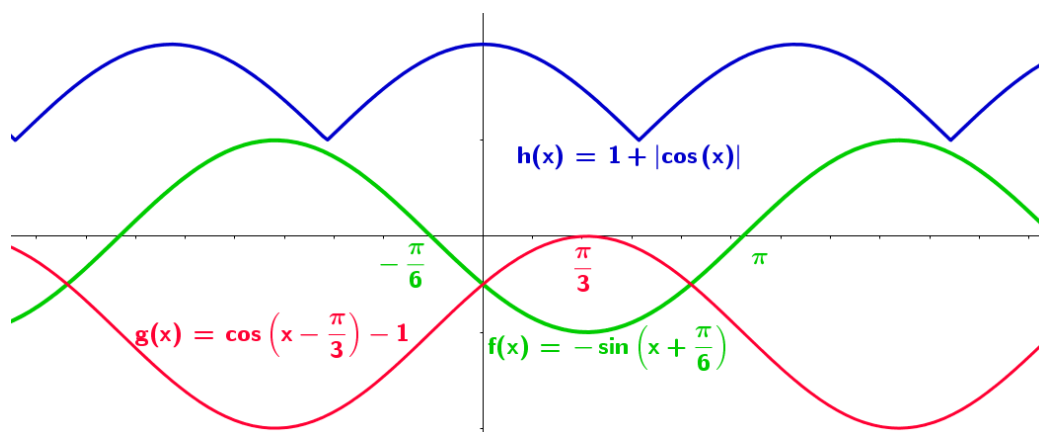
$$\text{ت) درست} \left. \begin{array}{l} \tan(\pi - \theta) = -\tan \theta \\ \tan \pi - \tan \theta = 0 - \tan \theta = -\tan \theta \end{array} \right\} \Rightarrow \tan(\pi - \theta) = \tan \pi - \tan \theta$$

۱- الف) وسط (قرمز)، نمودار تابع $y = \sin x$ رسم شده و قسمت پایین محور طولها، نسبت به محور طولها قرینه شده و آنگاه کل نمودار نسبت به محور طولها قرینه شده است. $\sin x \rightarrow |\sin x| \rightarrow -|\sin x|$

ب) راست (سبز)، نمودار $y = \cos x$ رسم شده و $\frac{\pi}{6}$ واحد به چپ منتقل شده است.

پ) چپ (آبی)، نمودار $y = \sin x$ رسم شده و $\frac{\pi}{3}$ واحد به راست منتقل شده است.

۲- الف) سبز، نمودار $y = \sin x$ به اندازه $\frac{\pi}{6}$ به چپ منتقل و سپس نسبت به محور طولها قرینه شده است.
 ب) قرمز، نمودار $y = \cos x$ به اندازه $\frac{\pi}{3}$ به راست و ۱ واحد به پایین منتقل شده است.
 پ) آبی، پایین نمودار $y = \cos x$ نسبت به محور طولها قرینه و سپس ۱ واحد به بالا منتقل شده است.



الف) $A_{\min} = (\frac{\pi}{3}, -1)$ $B_{\max} = (-\frac{2\pi}{3}, 1)$

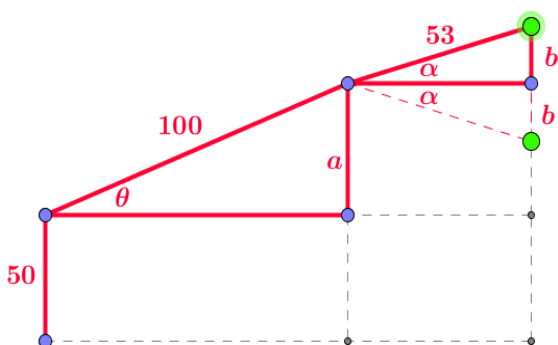
ب) $A_{\min} = (\frac{2\pi}{3}, -2)$ $B_{\max} = (\frac{\pi}{3}, 0)$

پ) $A_{\min} = (\frac{\pi}{4}, 1)$ $B_{\max} = (0, 2)$

تذکره: در الف) (ب) اگر به طول نقاط 2π اضافه کنیم، نقاط \max, \min دیگری خواهیم داشت و

در پ) اگر به طول نقاط π اضافه کنیم، نقاط \max, \min دیگری بدست می آید.

۳- هیچکدام از سه تابع در $(0, \pi)$ یک به یک نیستند.



(۵- الف)

$$\sin \theta = \frac{a}{100} \Rightarrow a = 100 \sin \theta, \quad \sin \alpha = \frac{b}{53} \Rightarrow b = 53 \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{h = 50 + 100 \sin \theta + 53 \sin \alpha}$$

$$\alpha = -30^\circ, \quad h = 23/5, \quad h = 50 + 100 \sin \theta + 53 \sin \alpha$$

$$\Rightarrow 23/5 = 50 + 100 \sin \theta + 53 \sin(-30^\circ) \Rightarrow 100 \sin \theta = 23/5 - 53(-\frac{1}{2}) - 50 = 0 \Rightarrow \theta = 0 \quad (\text{ب})$$

پس بازوی بزرگتر، روبات باید موازی محور افقی باشد.



$$\text{الف)} \quad \cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \times \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \times \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad -1$$

$$\text{ب)} \quad \tan 105^\circ = \tan(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \times \tan 45^\circ} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \times \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} = -(2 + \sqrt{3})$$

$$\text{پ)} \quad \sin \frac{\pi}{12} = \sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \times \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \times \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{ت)} \quad \sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ث)} \quad \cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \alpha = +\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{الف)} \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \sin \beta = +\sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13} \quad -2$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta = \frac{3}{5} \times \left(-\frac{12}{13}\right) + \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{-36 + 20}{65} = -\frac{16}{65}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{4}{5} \times \left(-\frac{12}{13}\right) + \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{-48 + 15}{65} = -\frac{33}{65}$$

انتهای α در ربع اول و انتهای β در ربع دوم قرار دارد پس انتهای $\alpha + \beta$ در ربع سوم قرار می‌گیرد (ب)

$$\text{الف)} \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta, \quad \alpha = \beta \quad -3$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \alpha \Rightarrow \boxed{\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

$$\text{ب)} \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta, \quad \alpha = \beta$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha \Rightarrow \boxed{\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$$

$$\text{پ)} \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \xrightarrow{\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha} \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\text{ت)} \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \xrightarrow{\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha} \cos 2\alpha = (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \xrightarrow{\alpha = 22/5^\circ} \cos 45^\circ = 2 \cos^2 22/5^\circ - 1 \Rightarrow \cos 22/5^\circ = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \quad -4$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \xrightarrow{\alpha = 22/5^\circ} \cos 45^\circ = 1 - 2 \sin^2 22/5^\circ \Rightarrow \sin 22/5^\circ = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

۱- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = ۲$ این تمرین نشان می دهد اینکه تابع $\rightarrow x = a$ تعریف شده باشد یا نباشد در حد و وجود آن در نقطه تاثیری ندارد و تنها همسایگی نقطه مهم هست.

۲- $\lim_{x \rightarrow 1} (۲x + ۱) = ۳$ $\lim_{x \rightarrow 2} (-x^2 + ۲x + ۴) = ۴$ $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = ۴$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+1} = ۰$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x+1} = ۰$

$\lim_{x \rightarrow 0} (-۳x + ۴) = ۴$

۳- الف)

x	-۱	-۰/۹	-۰/۱	-۰/۰۱	$\rightarrow ۰$	$\leftarrow ۰/۰۰۱$	۰/۰۱	۰/۱	۰/۵	۱
$f(x)$	۷	۶/۷	۴/۳	۴/۰۳	$\rightarrow ۴$	$\leftarrow ۳/۹۹۷$	۳/۹۷	۳/۷	۲/۵	۱

ب) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -۵$ $f(x) = \begin{cases} x - ۴ & x \neq -1 \\ ۳ & x = -1 \end{cases}$

ب)

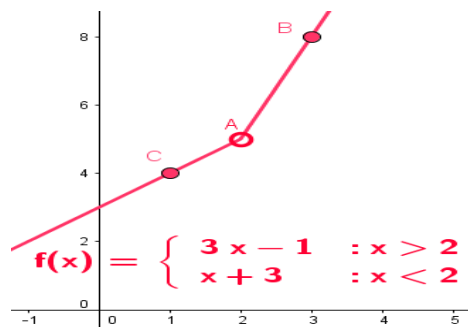
x	-۲	-۱/۵	-۱/۱	-۱/۰۱	-۱/۰۰۱	$\rightarrow -1$	$\leftarrow -۰/۹۹۹$	-۰/۹۹	-۰/۹	-۰/۸
$f(x)$	-۶	-۵/۵	-۵/۱	-۵/۰۱	-۵/۰۰۱	$\rightarrow -۵$	$\leftarrow -۴/۹۹۹$	-۴/۹۹	-۴/۹	-۴/۸

۴- الف) فیر ، $f(۲)$ وجود ندارد.

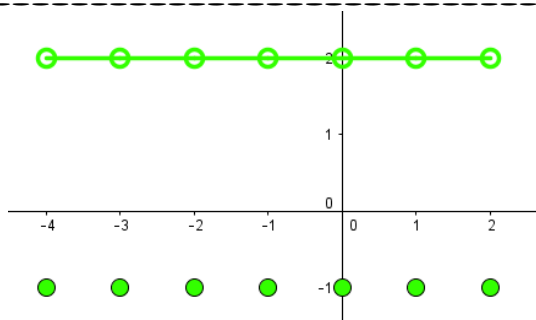
$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = ۵$

x	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	$\rightarrow ۲$	$۲ \leftarrow$	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۱
$f(x)$	۴/۹	۴/۹۹	۴/۹۹۹	$\rightarrow ۵$	$۵ \leftarrow$	۵/۰۰۱	۵/۰۱	۵/۱

$f(x) = \begin{cases} ۳x - 1 & x > 2 \\ x + 3 & x < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l|l} x & y \\ \hline ۲ & ۳ \\ ۵ & ۸ \end{array} \quad \begin{array}{l|l} x & y \\ \hline ۲ & ۱ \\ ۵ & ۴ \end{array}$



۵- الف) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = ۲$, $\lim_{x \rightarrow \sqrt{1}} g(x) = ۲$ (ب)



$$-6 \quad \left. \begin{array}{l} 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \\ x \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow D_f = [-1, 1] - \{0\} = [-1, 0) \cup (0, 1]$$

با توجه به دامنه بردست آمده ، شامل همسایگی منزوف عدد صفر است (ب)

بله همسایگی برای 0.1^9 وجود دارد که تابع در آن تعریف شده است مثلا $(0.1^8, 1)$ (پ)

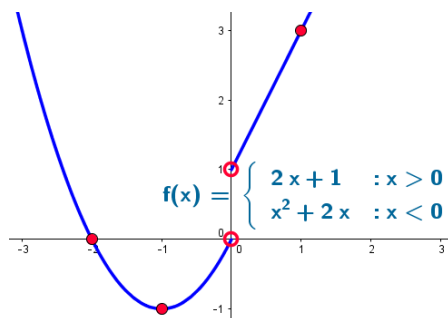
در همسایگی 1 چپ 1 تعریف شده مثلا $(0.1^9, 1)$ ولی در هیچ همسایگی راست 1 تعریف نشده است (ت)

۷- عدد 2 باید متعلق به این همسایگی باشد ، پس

$$2 \in (x-1, 2x+3) \Rightarrow \begin{cases} x-1 < 2 \Rightarrow x < 3 \\ 2x+3 > 2 \Rightarrow x > -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x < 3 \Rightarrow x \in \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$$

- الف) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4$ ب) $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ ندارد}$ -۱
- پ) $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \Delta^+} f(x) \text{ } \square \\ \lim_{x \rightarrow \Delta^-} f(x) = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \Delta} f(x) \text{ ندارد}$ ت) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \text{ ندارد}$
- ث) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -1$ ج) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$
- چ) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x > 0 \Rightarrow \begin{array}{l|l} x & 0 \quad 1 \\ y & 1 \quad 3 \end{array} \\ x^2+2x & x < 0 \Rightarrow \begin{array}{l|ll} x & -2 & -1 \\ y & 0 & -1 \end{array} \end{cases}$$



- الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ پ) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ ندارد}$ راس و چپ در $x=0$ برابر نیست پس در $x=0$ ندارد

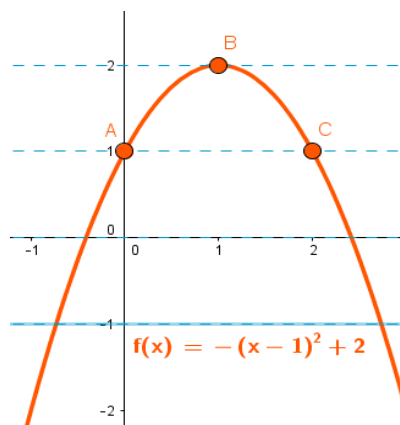
- ۳- تابع در همسایگی ممزوف ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد. (الف)(ب)(ج)
- تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد ولی مقدار حد با مقدار تابع در این نقطه برابر نیست. (الف)(ج)
- تابع در همسایگی چپ ۲ تعریف شده و در این نقطه حد ندارد. (پ)(ت)(ث)
- تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد و مقدار آن با مقدار تابع در این نقطه برابر است. (ب)
- تابع در نقطه ۲ تعریف نشده ولی در این نقطه حد دارد. (ج)
- تابع در همسایگی راست ۲ تعریف شده و در این نقطه حد ندارد. (ت)(ث)

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x} \Rightarrow x^2 - x \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \vee x \leq 0 \Rightarrow D_f = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$$
 -۴

تابع f در هیچ همسایگی چپ ۱ تعریف نشده است، پس در $x=1$ حد چپ ندارد.

$$f(x) = \frac{x}{[x]-2} \Rightarrow [x]-2=0 \Rightarrow [x]=2 \Rightarrow 2 \leq x < 3 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - [2, 3) = (-\infty, 2) \cup [3, +\infty)$$
 -۵

تابع f در هیچ همسایگی راست ۲ تعریف نشده است، پس در $x=2$ حد راست ندارد.



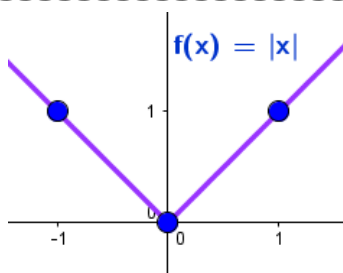
۶- الف) با توجه به شکل در یک همسایگی ۱ داریم،

$$1 < f(x) < 2 \Rightarrow [f(x)] = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

ب) با توجه به شکل هر تابع f در $x=1$ برابر است با،

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \Rightarrow [\lim_{x \rightarrow 1} f(x)] = [1] = 1$$

$$f(x) = |x| \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -1 & 0 & 1 \\ \hline y & 1 & 0 & 1 \end{array}$$



۷- الف) $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$

ب) درست، $\forall a \in \mathbb{R} \lim_{x \rightarrow a} |x| = a$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 9} (\sqrt{x} - 9)^2 = (\sqrt{9} - 9)^2 = -216 \quad \text{ب) } \lim_{x \rightarrow -1} (-6x^3 - 4x^2 + 5) = -6(-1)^3 - 4(-1)^2 + 5 = 7 \quad -1$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}} \frac{(x + \pi)(3x + 5)}{(3x + 6)(x^2 + 1)} = \frac{(-\frac{5}{3} + \pi)(3(-\frac{5}{3}) + 5)}{(3(-\frac{5}{3}) + 6)((-\frac{5}{3})^2 + 1)} = \frac{(-\frac{5}{3} + \pi)(0)}{1(-\frac{125}{27} + 1)} = 0$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \frac{1-(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{2})^2-4} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \quad \text{ث) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \sqrt{4x^2 + 6x} = \sqrt{4(\frac{1}{4})^2 + 6(\frac{1}{4})} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{x + \cos x} = \frac{\sin \cdot}{\cdot + \cos \cdot} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{چ) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{|\cos x|}{x - \pi} = \frac{|\cos \frac{\pi}{2}|}{\frac{\pi}{2} - \pi} = \frac{0}{-\frac{\pi}{2}} = 0$$

تذکره: در تمرینهای بالا از قضایای حد استفاده شده که به طور خلاصه آن است که در توابع برای یافتن حد در یک نقطه به شرط آن که تابع در یک همسایگی آن تعریف شده باشد و نقطه مورد نظر نقطه مرزی تابع نباشد، عدد مورد نظر را در ضابطه تابع قرار داده و مناسبه کنیم.
یادآوری: نقطه مرزی نقطه است که ضابطه به ازای مقادیر بزرگتر یا کوچکتر آن متفاوت است.

$$-2 \text{ غیر مثلا در تابع } f(x) = (x-1)(x-2) + 3 \text{ داریم } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3 \text{ ولی } f \text{ تابع ثابت نیست.}$$

$$-3 \quad g(x) = 12 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{12}{x^2 - 1} = \frac{12}{4 - 1} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} L = L - L = 0$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow a} L = L \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) + L = 0 + L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad -4 \text{ قضیه دو شرطی است.}$$

$$y = 3x + 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (3x + 2) = 5$$

$$y = x^2 - 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0$$

$$y = [x] - 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} ([x] - 1) = 1 - 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} ([x] - 1) = 0 - 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} ([x] - 1) \text{ } \boxed{\times} \quad -5 \text{ الف}$$

$$f(x) = \begin{cases} -2 & x < 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ } \boxed{\times}$$

ب) هر سه تابع $(f+g)(x) = x^2 + 3x + 1$, $g(x) = x^2 - 1$, $f(x) = 3x + 2$ در $x = 1$ حد دارند و

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 3x + 1 = 5$$

تابع $f \cdot g$ در $x = 1$ حد دارد ولی f در $x = 1$ حد ندارد که

$$f(x) = [x] - 1, g(x) = x^2 - 1 \Rightarrow (f \cdot g)(x) = (x^2 - 1)([x] - 1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (f \cdot g)(x) = 0$$

توابع f, g در $x = 1$ حد دارند ولی $\frac{f}{g}$ در $x = 1$ حد نیست، راست ندارد که

$$f(x) = 3x + 2, g(x) = x^2 - 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x + 2}{x^2 - 1} = \frac{5}{0} \quad \boxed{\times}$$

تابع f^2 در $x = 1$ حد دارد ولی تابع f در $x = 1$ حد ندارد که

$$f(x) = \begin{cases} -2 & x < 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases} \Rightarrow f^2(x) = 4, x \neq 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f^2(x) = 4$$

تابع f در $x = 1$ حد دارد ولی تابع \sqrt{f} در $x = 1$ حد ندارد که

$$f(x) = x^2 - 1 \Rightarrow g(x) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x^2 - 1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x^2 - 1} \quad \boxed{\times} \end{cases}$$

۶- $f + g$ هم در a حد ندارد، زیرا

برهان خلف: اگر $f + g$ در a دارای حد باشد، چون f در a دارای حد است پس تفاضل آنها یعنی

$(f + g) - f = g$ هم در a دارای حد است که خلاف فرض (عدم وجود حد g در a) است.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + [x]}{|x|} = \frac{(-1)^2 + (-2)}{1} = -1, \lim_{x \rightarrow -1^+} (3x + b) = -3 + b \Rightarrow -3 + b = -1 \Rightarrow b = 2 \quad -7$$

$$a) \lim_{x \rightarrow -2} (2g(x) - f(x)) = 2 \lim_{x \rightarrow -2} g(x) - \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2(2) - 0 = 4 \quad -8$$

$$b) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad \boxed{\times} \quad \text{تابع } f \text{ در } 2 \text{ حد ندارد ولی } g \text{ در } 2 \text{ حد دارد پس } \frac{g}{f} \text{ در } 2 \text{ حد ندارد.}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -2} -2\sqrt{g(x)} = -2\sqrt{\lim_{x \rightarrow -2} g(x)} = -2\sqrt{1} = -2$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[2]{g(x)} = \sqrt[2]{\lim_{x \rightarrow 2} g(x)} = \sqrt[2]{3}$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + x - 1}}{\sqrt{x^2 + 2x}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-1)}{\sqrt{x}(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{\sqrt{x}} = \frac{-2}{-2} = 1 \quad -1$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2[x]-8}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-8}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x+2)}{1} = 4$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4} \times \frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)-4}{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{1}{16}$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{x+1}} \times \frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} \times \frac{2+\sqrt{x+1}}{2+\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})(2+\sqrt{x+1})}{(9-x)(2+\sqrt{x})(2+\sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2+\sqrt{x+1}}{2(2+\sqrt{x})} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2+x} \times \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1+x)-(1-x)}{(x^2+x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{x(x+1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x).g(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} \times \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} \quad -2$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x} \times \frac{1+\sin x}{1+\sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{0}{1+1} = 0 \quad -3$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x+\frac{\pi}{4})}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4}}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)}{\cos x - \sin x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{|1-\cos x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{1-\cos x} \times \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2(1+\cos x)}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = 2$$

$$\text{ت) } \text{روش } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-2\cos x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1-\cos x)(1+\cos x)}{x \sin x (1+\cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{1+\cos x} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{روش } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-2\cos x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1-\cos x)}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\frac{x}{2})}{x(\sin(\frac{x}{2}) \cdot \cos(\frac{x}{2}))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\frac{x}{2})}{2x \cdot \frac{x}{2} \cdot \cos(\frac{x}{2})} = \frac{1}{\cos 0} = 1$$

$$x + \pi = t \Rightarrow x = t - \pi, \boxed{x \rightarrow -\pi \Rightarrow t \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\cos x + 1}{x + \pi} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(-\pi + t) + 1}{t}$$

ث) روش

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} \times \frac{1 + \cos t}{1 + \cos t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cancel{1 - \cos^2 t}}{t(1 + \cos t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t \cdot \sin t}{t(1 + \cos t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{1 + \cos t} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\text{روش, } \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\cos x + 1}{x + \pi} = \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\sqrt{\cos^2(\frac{x}{2})}}{x + \pi} = \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\cancel{\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2})} \cdot \sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2})}{\frac{x + \pi}{2} \times \cancel{2}} = \lim_{x \rightarrow -\pi} \sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}) = \sin 0 = 0$$

$$\begin{cases} x - a = t \Rightarrow x = a + t \\ x \rightarrow a \Rightarrow t \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(a + t) - \sin a}{t}$$

ج) روش

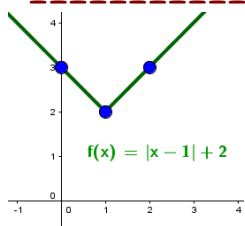
$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t \cdot \cos a + \cos t \cdot \sin a - \sin a}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t \cdot \cos a}{t} + \sin a \left(\frac{\cos t - 1}{t} \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \cos a + \sin a \frac{(-\sqrt{\sin^2(\frac{t}{2})})}{t} = \cos a + \sin a \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sqrt{\sin^2(\frac{t}{2})} \cdot \sin(\frac{t}{2})}{\frac{t}{2} \times 2} = \cos a + \sin a \times 0 = \cos a$$

$$\text{روش, } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cancel{\sin(\frac{x-a}{2})} \cdot \cos(\frac{x+a}{2})}{\frac{x-a}{2} \times \cancel{2}} = \lim_{x \rightarrow a} \cos(\frac{x+a}{2}) = \cos a$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

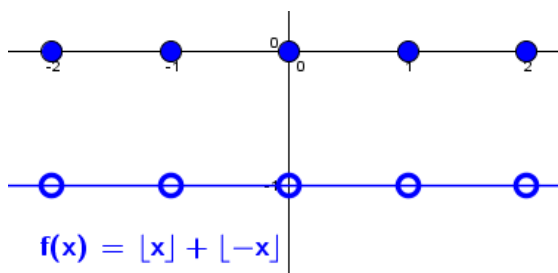
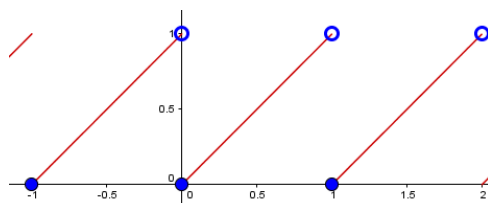
$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{x-1} \times \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \frac{2}{2} = 1$$



۱- الف) تابع در تمام نقاط دامنه اش پیوسته است. $y = |x-1| + 2 \Rightarrow \begin{array}{c|c} x & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 3 & 2 & 3 \end{array}$

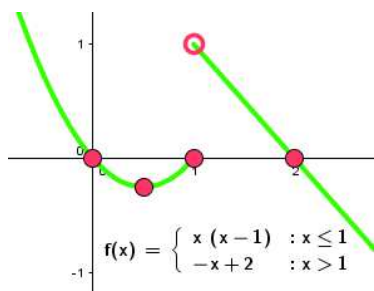
$$y = x - [x] \Rightarrow y = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ x-1 & 1 \leq x < 2 \\ \dots & \dots \end{cases}$$

ب) تابع در نقاط به طول صحیح پیوسته نیست.



پ) تابع در نقاط به طول صحیح پیوسته نیست.

$$y = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$



ت) تابع فقط در ۱ پیوسته نیست.

$$y = \begin{cases} x(x-1) & x \leq 1 \Rightarrow \begin{array}{c|c} x & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline y & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \end{array} \\ -x+2 & x > 1 \Rightarrow \begin{array}{c|c} x & 1 & 2 \\ \hline y & 1 & 0 \end{array} \end{cases}$$

$$\text{الف) } f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x-1) = 1 \\ a & x = 1 \Rightarrow f(1) = a \\ -x+2 & x > 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x+2) = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1$$

$$\text{ب) } g(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1} & x \neq 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x-1} = 3 \\ a & x = 1 \Rightarrow g(1) = a \end{cases} \Rightarrow a = 3$$

$$\text{پ) } h(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & 0 < x < 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1+a = \frac{1}{2} \\ [x]+a & x \geq 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [x]+a = 1+a, \quad h(1) = 1+a \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$\text{ت) } k(x) = ([x] - a)[x] \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} k(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ([x] - a)[x] = (1 - a)(1) = \boxed{1 - a} \\ k(1) = (1 - a)(1) = \boxed{1 - a} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} k(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} ([x] - a)[x] = (0 - a)(0) = \boxed{0} \end{cases} \Rightarrow 1 - a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

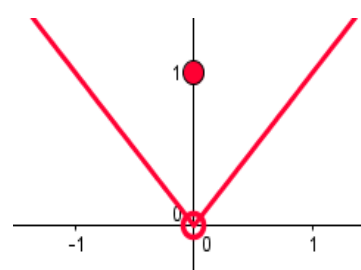
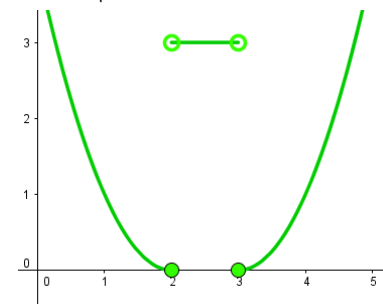
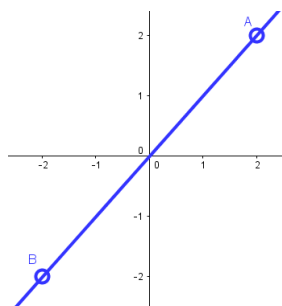
۳- همزمان a باید هم صفر و هم یک باشد که غیر ممکن است.

$$\text{الف) } f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0 \\ a & x = 0 \Rightarrow f(0) = a \\ 2x + 1 & x > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x + 1) = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 0 \wedge a = 1 \quad \boxed{\times}$$

همزمان a باید -1 ، 1 باشد که غیر ممکن است.

$$\text{ب) } g(x) = \begin{cases} \frac{ax}{|x|} & x \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{x} = \boxed{a}, \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax}{-x} = \boxed{-a} \\ 1 & x = 0 \Rightarrow \boxed{g(0) = 1} \end{cases} \Rightarrow a = 1 \wedge a = -1 \quad \boxed{\times}$$

۴- الف) در 0 ناپیوسته و دارای حد ب) در $2, 3$ ناپیوسته و عدم وجود حد ب) فقط در دو نقطه ناپیوسته



۵- تابع پلکانی در بازه باز شامل نقاط درونی هر پله، پیوسته است و در $f(x) = [x]$ طول پله برابر 1 است پس طول بزرگترین بازه که f در آن پیوسته باشد برابر 1 است یعنی $\max_k = 3 \Rightarrow k \leq 3 \Rightarrow k - 2 \leq 1$

۶- توابع تک ضابطه ای بر دامنه شان پیوسته اند. $2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow D_f = (-\infty, 2]$

هر بازه بسته زیر مجموعه D_f پاسخ پرسش است، مثلا $[0, 2], [1, 2], [2, 3]$

-۷

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} & x > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\frac{x^2}{4} \times 4} = \boxed{\frac{1}{2}} \\ b - 1 & x = 0 \Rightarrow f(0) = \boxed{b - 1} \\ x - 2a & x < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x - 2a = \boxed{-2a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{b = \frac{3}{2}} \\ -2a = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{4}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \cos x = \sqrt{2} \cos \frac{x}{2} \\ 1 - \cos x = \sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \\ 1 - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\ \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x} \\ \tan x - \cot x = -2 \cot 2x \end{cases}$$

روابط مثلثاتی)